Sixième partie

CTL – logique temporelle arborescente

Plan

Computational Tree Logic

Modèles

Une formule CTL se rapporte toujours à un état donné s d'un système, duquel partent des traces $Traces(s)$.
Les états de S constituent les modèles de cette logique.

La différence (syntaxiquement parlant) avec LTL réside dans l'apparition dans les opérateurs temporels de quantificateurs de traces.

Syntaxe de la CTL

Quantification universelle

formule	interprétation (pour s un état) pour toute trace partant de s
$\forall \bigcirc P$	P est vrai à l'instant suivant
$\forall \Box P$	P est toujours vrai à chaque état
$\forall \Diamond P$	P finit par être vrai (dans le futur)
$P \forall \mathcal{U} Q$	Q finit par être vrai, et en attendant P reste vrai

Quantification existentielle

Opérateurs duaux construits à partir du quantificateur $\exists$.

formule	interprétation (pour s un état) pour au moins une trace partant de s
$\exists \Box P$	P est toujours vrai à chaque état
...	...

Opérateurs minimaux

Les opérateurs minimaux sont $\forall\bigcirc P$, $P \,\forall\mathcal{U}\, Q$ et $P \,\exists\mathcal{U}\, Q$:

- $\exists\bigcirc P \triangleq \neg\forall\bigcirc\neg P$
- $\forall\Diamond P \triangleq \mathit{True} \,\forall\mathcal{U}\, P$
- $\exists\Diamond P \triangleq \mathit{True} \,\exists\mathcal{U}\, P$
- $\forall\Box P \triangleq \neg\exists\Diamond\neg P$
- $\exists\Box P \triangleq \neg\forall\Diamond\neg P$
- Opérateur waiting-for
  $P \,\exists\mathcal{W}\, Q \triangleq \exists\Box P \vee P \,\exists\mathcal{U}\, Q$
  $P \,\forall\mathcal{W}\, Q \not\triangleq \forall\Box P \vee P \,\forall\mathcal{U}\, Q$
  $\triangleq \neg(\neg Q \,\exists\mathcal{U}(\neg P \wedge \neg Q))$

Syntaxe alternative

On trouve fréquemment une autre syntaxe :

- $\forall \quad \leftrightarrow$ A (all)
- $\exists \quad \leftrightarrow$ E (exists)
- $\Box \quad \leftrightarrow$ G (globally)
- $\Diamond \quad \leftrightarrow$ F (finally)
- $\bigcirc \quad \leftrightarrow$ X (next)

$\forall \Box \exists \Diamond P \leftrightarrow$ AG EF P

$f \, \forall \mathcal{U} \, g \leftrightarrow$ A(f U g)

Sémantique (système)

La relation de validation sémantique ne fait intervenir que l'état courant.

Vérification par un système

Un système $\mathcal{S}$ vérifie (valide) la formule F ssi tous les états initiaux de $\mathcal{S}$ la valident :

$$\frac{\forall s \in I : s \models F}{\mathcal{S} \models F}$$

Contrairement à LTL, pour toute propriété CTL, on a :
soit $\mathcal{S} \models F$, soit $\mathcal{S} \models \neg F$,
et $\mathcal{S} \not\models F \equiv \mathcal{S} \models \neg F$.

Sémantique (opérateurs logiques)

$$\frac{}{s \models s}$$

$$\frac{s \models P \quad s \models Q}{s \models P \wedge Q}$$

$$\frac{s \models P}{s \not\models \neg P}$$

Sémantique (opérateurs temporels)

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \sigma_1 \models P}{s \models \forall \bigcirc P}$$

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists j \geq 0 : \sigma_j \models Q \wedge \forall i < j : \sigma_i \models P}{s \models P \, \forall \mathcal{U} \, Q}$$

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists j \geq 0 : \sigma_j \models Q \wedge \forall i < j : \sigma_i \models P}{s \models P \, \exists \mathcal{U} \, Q}$$

Sémantique (opérateurs temporels dérivés)

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \sigma_1 \models P}{s \models \exists \bigcirc P}$$

$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \forall i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \forall \Box P}$$

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \forall i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \exists \Box P}$$

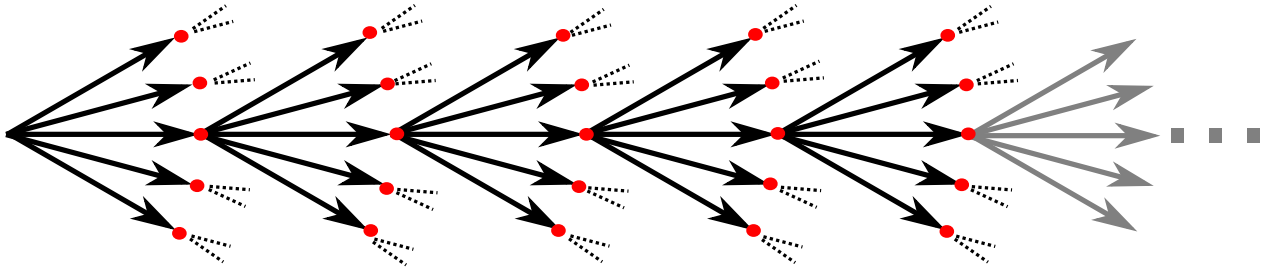
$$\frac{\forall \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \forall \Diamond P}$$

$$\frac{\exists \sigma \in \mathit{Traces}(s) : \exists i \geq 0 : \sigma_i \models P}{s \models \exists \Diamond P}$$

Plan

Exemples amusants

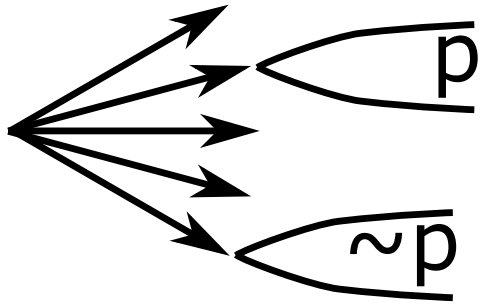
- $\exists\Box\ \forall\bigcirc\ p$: une exécution avec une “enveloppe” qui vérifie p



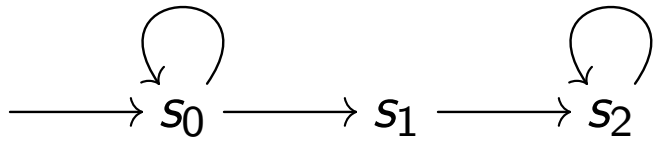
- $\exists\bigcirc\ \forall\Box p\ \wedge\ \exists\bigcirc\ \forall\Box\neg p$

  un état successeur à partir duquel p est toujours et partout vrai,

  et un état successeur à partir duquel $\neg p$ est toujours et partout vrai

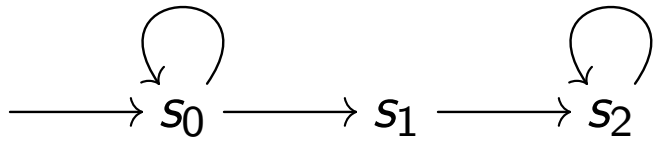


Exemple



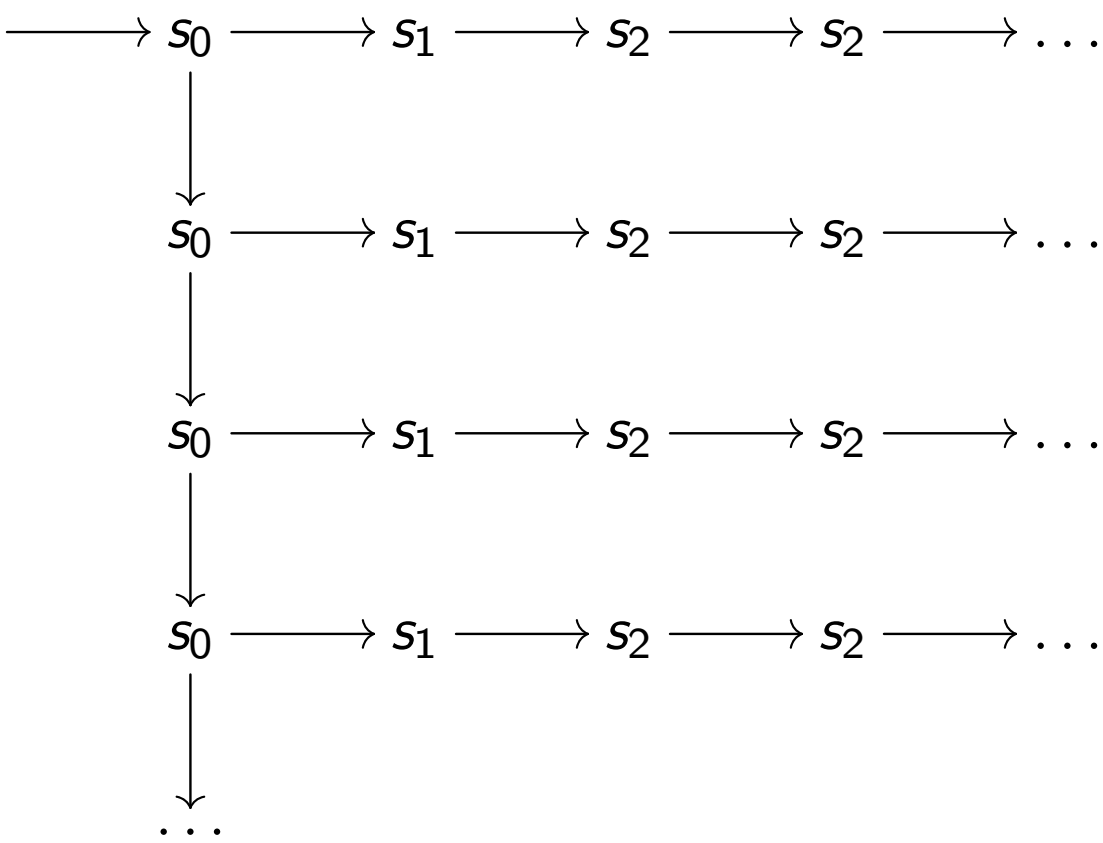
	pas d'équité	équité faible (s_0, s_1)
$s_0 \wedge \forall\bigcirc s_0$		
$s_0 \wedge \exists\bigcirc s_0$		
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \exists\bigcirc s_0)$		
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \exists\Diamond s_2)$		
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_2)$		
$\exists\Diamond\neg s_0$		
$\forall\Diamond\neg s_0$		
$\forall\Box\exists\Diamond s_2$		
$\forall\Box\forall\Diamond s_2$		
$\forall\Diamond\exists\Diamond s_1$		

Exemple

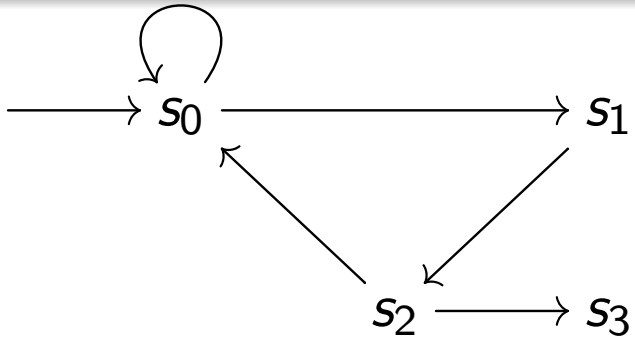


	pas d'équité	équité faible (s_0, s_1)
$s_0 \wedge \forall\bigcirc s_0$	n	n
$s_0 \wedge \exists\bigcirc s_0$	o	o
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \exists\bigcirc s_0)$	o	o
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \exists\Diamond s_2)$	o	o
$\forall\Box(s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_2)$	n	o
$\exists\Diamond\neg s_0$	o	o
$\forall\Diamond\neg s_0$	n	o
$\forall\Box\exists\Diamond s_2$	o	o
$\forall\Box\forall\Diamond s_2$	n	o
$\forall\Diamond\exists\Diamond s_1$	o	o

Exemple - l'arbre d'exécutions

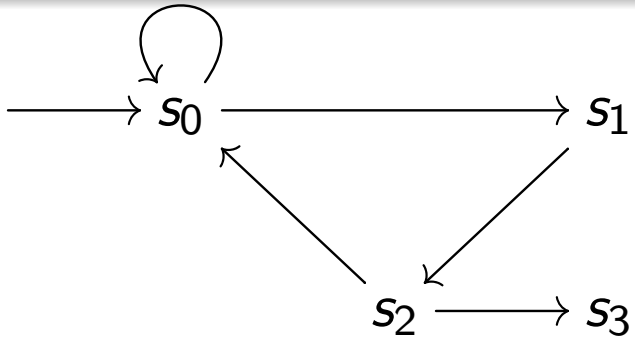


Exemple 2



	pas d'équité	forte (s_2, s_3)	forte (s_2, s_3) faible (s_0, s_1)
$\exists\Box s_0$			
$\forall\Box\exists\Diamond s_3$			
$\forall\Box\forall\Diamond s_3$			
$\forall\Diamond\forall\Box s_3$			
$\exists\Box s_0 \vee \forall\Diamond s_1$			
$\forall\Diamond\neg s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_1$			

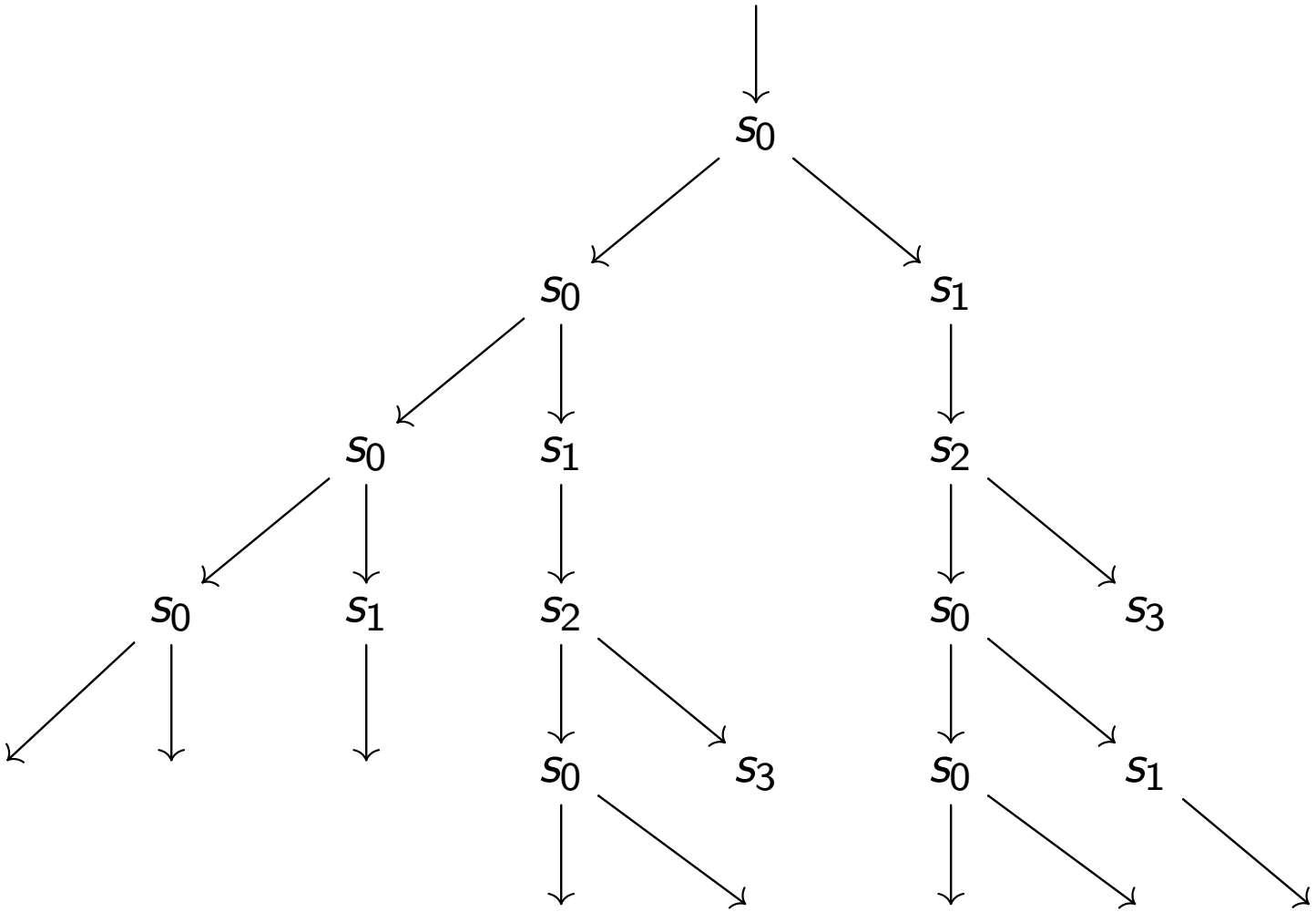
Exemple 2



	pas d'équité	forte (s_2, s_3)	forte (s_2, s_3) faible (s_0, s_1)
$\exists\Box s_0$	o	o	n
$\forall\Box\exists\Diamond s_3$	o	o	o
$\forall\Box\forall\Diamond s_3$	n	n	o
$\forall\Diamond\forall\Box s_3$	n	n	o
$\exists\Box s_0 \vee \forall\Diamond s_1$	o	o	o
$\forall\Diamond\neg s_0 \Rightarrow \forall\Diamond s_1$	o	o	o

Contrairement à LTL, avec l'équité, on peut à la fois rendre vraie une propriété (p.e. contenant $\Diamond$ ou $\mathcal{U}$) et rendre faux une propriété (p.e. contenant $\exists\cdot$).

Exemple 2 - l'arbre d'exécutions



Invariance, Possibilité

Invariance

Spécifier un sur-ensemble des états accessibles d'un système :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box P$$

Stabilité

Spécifier la stabilité d'une situation si elle survient :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow \forall\Box P)$$

Possibilité

Spécifier qu'il est possible d'atteindre un certain état vérifiant P dans une certaine exécution :

$$\mathcal{S} \models \exists\Diamond P$$

Possibilité complexe

Séquence

Spécifier qu'un scénario d'exécution $\langle s_1 \to s_2 \to \ldots \to s_n \rangle$ est possible.

$$\mathcal{S} \models s_1 \wedge \exists\bigcirc(s_2 \wedge \ldots \wedge \exists\bigcirc(s_{n-1} \wedge \exists\bigcirc s_n)\ldots)$$

Réinitialisabilité

Spécifier que quelque soit l'état courant, il est possible de revenir dans un des états initiaux (définis par le prédicat I).

$$\mathcal{S} \models \forall\Box\exists\Diamond I$$

Possibilité arbitraire

Spécifier que si P devient vrai, il est toujours possible (mais pas nécessaire) que Q le devienne après.

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow \exists\Diamond Q)$$

Client/serveur

Réponse

Spécifier qu'un système (jouant le rôle d'un serveur) répond toujours (par Q) à un requête donnée (par P) :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow \forall\Diamond Q)$$

Stabilité d'une requête

Spécifier que la requête P d'un système (jouant le rôle d'un client) est stable tant qu'il n'y a pas de réponse favorable Q :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \Rightarrow P \,\forall\mathcal{W}\, Q)$$

Combinaisons

Infiniment souvent

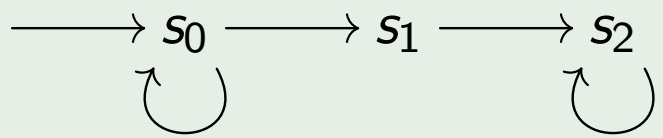
Spécifier que P est infiniment souvent vrai dans toute exécution :

$$\mathcal{S} \models \forall\Box\forall\Diamond P$$

Finalement toujours

Spécifier que P finit par rester définitivement vrai :

impossible ! $\mathcal{S} \models \forall\Diamond\forall\Box P$ ne convient pas (trop fort)

Soit $S =$ 

en LTL : $S \models \Diamond\Box(s_0 \vee s_2)$

mais CTL : $S \not\models \forall\Diamond\forall\Box(s_0 \vee s_2)$ (tant qu'on est en s_0, on *peut* passer en s_1 : $S \models \forall\Diamond\exists\Diamond s_1$)

Note : $\mathcal{X}\mathcal{X}P = \mathcal{X}P$ pour $\mathcal{X} \in \{\forall\Box, \exists\Box, \forall\Diamond, \exists\Diamond\}$

Spécification d'un ST

Si on utilise une description en intention, et si l'on remplace l'utilisation de l'opérateur $\forall\bigcirc$ par les variables primées, alors on peut spécifier toutes les exécutions permises par un système $\langle S, I, R\rangle$:

$$\mathcal{S} \models I \wedge \forall\Box R$$

L'utilisation de variables primées n'est pas nécessaire mais simplifie les formules.
Par exemple $P(x, x')$ est équivalent à la formule :
$\forall v : x = v \Rightarrow \forall\bigcirc P(v, x)$
qui nécessite une quantification sur une variable.

Comparaison CTL vs. LTL

Contrairement à CTL, les opérateurs temporels LTL parlent tous de la même trace. Les combinaisons de connecteurs temporels ont parfois des sens (subtilement) différents.

	CTL	LTL
$si \mid I \mid = 1$	$\mathcal{S} \models \neg P \vee P$	~~$\mathcal{S} \models \neg P \vee P$~~
l'un de P ou Q inévitable	~~$\mathcal{S} \models \forall\Diamond P \vee \forall\Diamond Q$~~ $\mathcal{S} \models \forall\Diamond(P \vee Q)$	$\mathcal{S} \models \Diamond P \vee \Diamond Q$
l'un de P ou Q continu	~~$\mathcal{S} \models \forall\Box(P \vee Q)$~~ ~~$\mathcal{S} \models \forall\Box P \vee \forall\Box Q$~~	$\mathcal{S} \models \Box P \vee \Box Q$
$\neg P$ transitoire	~~$\mathcal{S} \models \forall\Diamond\forall\Box P$~~	$\mathcal{S} \models \Diamond\Box P$
possibilité	$S \models \exists\Diamond P \wedge \exists\Diamond\neg P$	~~$S \models \Diamond P \wedge \Diamond\neg P$~~
négation	$S \models \neg P \equiv S \not\models P$	$S \models \neg P \not\equiv S \not\models P$

Conséquence : l'équité n'est pas exprimable en CTL.
Néanmoins, on peut vérifier des propriétés CTL sur un ST comportant des contraintes d'équité.

Comparaison CTL vs. LTL

Linear Time Logic

+ Intuitive
− . . . sauf la négation
+ Suffisante pour décrire un système de transition
+ y compris l'équité exprimable
− Vérification exponentielle en le nombre d'opérateurs temporels

Computational Tree Logic

− Expressivité parfois déroutante
+ Propriétés de possibilité (p.e. réinitialisabilité)
+ Suffisante pour décrire un système de transition
− . . . sauf l'équité non exprimable (mais utilisable)
+ Vérification linéaire en le nombre d'opérateurs temporels

CTL*

CTL* autorise tout mélange des quantificateurs de traces $\forall, \exists$ et d'états $\Box, \Diamond, \bigcirc, \mathcal{U}$.

Exemple : $\exists((\Box\Diamond P) \wedge (\Diamond Q)) =$ il existe une exécution où P est infiniment souvent vrai, et où Q sera vrai.

CTL* est strictement plus expressif que CTL et LTL.