

Troisième partie

L'équité dans les systèmes de transitions



Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
 - Équité simple
 - Équité multiple
 - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
 - Équité faible
 - Équité forte
 - Équité sur les étiquettes



Contraintes d'équité / *fairness*

Les contraintes d'équité spécifient que certains états (resp. certaines transitions) doivent être visités (resp. exécutés) **infiniment souvent** dans toute exécution du programme.

D'une façon générale, les contraintes d'équité servent à contraindre un programme ou son environnement à être **vivace**, sans entrer dans les détails concernant la réalisation pratique de ces contraintes.

Les contraintes d'équité **réduisent** l'ensemble des exécutions légales, en éliminant les exécutions qui ne respectent pas les contraintes d'équité.



Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
 - Équité simple
 - Équité multiple
 - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
 - Équité faible
 - Équité forte
 - Équité sur les étiquettes



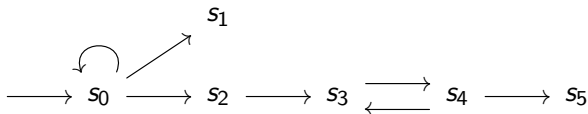
Équité simple sur les états

Rappel : $Inf_S(P, \sigma) \stackrel{\Delta}{=} P$ est un ensemble d'états récurrent dans σ i.e. P apparaît une infinité de fois dans σ (cas σ infini) ou l'état final de σ est dans P (cas σ fini).

On se donne $F \subseteq S$ un ensemble d'états équitables.
Alors toute exécution σ doit être telle que $Inf_S(F, \sigma)$.

F est récurrent dans σ , i.e. σ contient une infinité d'états dans F (cas σ infini), ou le dernier état de σ est dans F (cas σ fini).

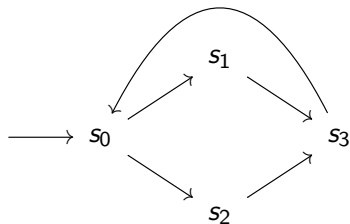
Exemple - équité simple



$$\begin{aligned}
 \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \\
 & \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle
 \end{aligned}$$

Équité simple	Exécutions
$\{s_0\}$	$\langle s_0^\omega \rangle$
$\{s_1, s_4\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle$
$\{s_1, s_5\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$

Exemple - équité simple



On fixe : équité simple sur $\{s_1\}$.

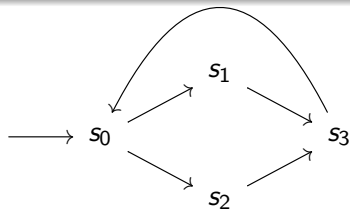
légale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

légale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

illégale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

légale $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^*)^\omega \rangle$

Exemple - équité simple



$Exec(S) =$

Équité simple	
$\{s_2\}$	
$\{s_1, s_2\}$	

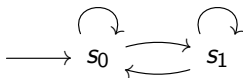
Équité multiple sur les états

On se donne un ensemble dénombrable, indexable par un ensemble de nombres entiers $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, d'ensembles équitables $\{F_i\}_{i \in J}$.
Toute exécution σ doit être telle que $\forall i \in J : \text{Inf}_S(F_i, \sigma)$.

Exécutions vérifiant l'équité multiple = **intersection** des exécutions vérifiant l'équité simple sur chacun des F_i .



Exemple - équité multiple



$Exec(S) =$

Équité simple/multiple	
$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_1\}$	
$\{s_0\}\{s_1\}$	

Équivalence équité multiple finie \leftrightarrow simple

Cas simple : J est fini. $|J|$ est la cardinalité de J .

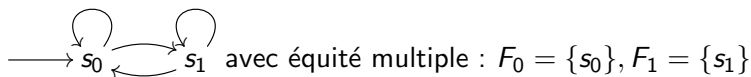
Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times J$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \begin{aligned} & \{(\langle s, j \rangle, \langle s', j + 1 \bmod |J| \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ & \cup \{(\langle s, j \rangle, \langle s', j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{aligned}$
- Équité simple $F' = F_0 \times \{0\}$

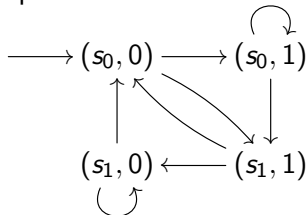
Le premier ensemble de R' est pour le cas où on visite un état de F_j et on cherche donc à visiter l'ensemble suivant ; le deuxième ensemble est pour le cas où on n'est pas en train de visiter un état de F_j , que l'on continue à attendre.



Exemple équité multiple



ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_0, 0)\}$

Équivalence équité multiple \leftrightarrow simple

Cas général (J potentiellement infini).

Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times J \times J$
- $I' = I \times \{0\} \times \{0\}$
- $R' =$

$$\begin{aligned} & \{(\langle s, i, i \rangle, \langle s', i \oplus 1, 0 \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_i\} \\ & \cup \{(\langle s, i, j \rangle, \langle s', i, j + 1 \rangle) \mid j < i \wedge (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ & \cup \{(\langle s, i, j \rangle, \langle s', i, j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{aligned}$$
- Équité simple $F' = F_0 \times J \times \{0\}$

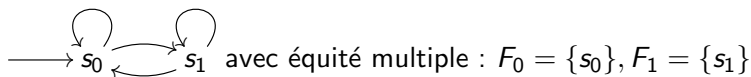
avec : $i \oplus 1 \triangleq \begin{cases} i + 1 & \text{si } J \text{ est infini} \\ i + 1 \bmod |J| & \text{sinon} \end{cases}$

Une exécution typique des compteurs i, j forme un triangle :

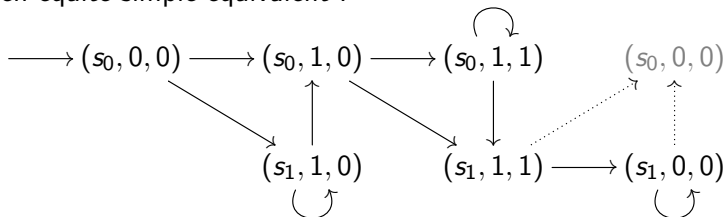
$\langle (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 0) \rightarrow \dots \rangle$



Exemple équité multiple



ST en équité simple équivalent :

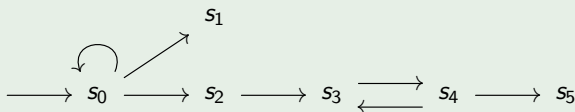


avec équité simple sur $\{(s_0, 0, 0), (s_0, 1, 0)\}$

Équité conditionnelle sur les états

On se donne deux ensembles F et G . Toute exécution σ doit être telle que $Inf_S(F, \sigma) \Rightarrow Inf_S(G, \sigma)$.

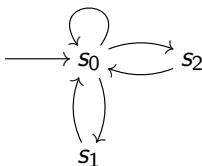
Si F est récurrent dans σ , alors G doit être récurrent dans σ .



Équité cond.	Exécutions
$\{s_0\} \Rightarrow \{s_5\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{s_3\} \Rightarrow \{s_4\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$

27

Exemple - équité conditionnelle



$Exec(S) =$

Équité cond.	
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	

Équivalence équité conditionnelle \leftrightarrow simple

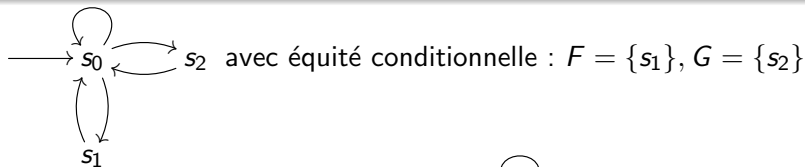
On étudie le système $\langle S', I', R' \rangle$ tel que :

- $S' = (S \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{(\langle s, i \rangle, \langle s', j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge 1 \geq j \geq i \geq 0\} \cap (S' \times S')$
- Équité simple $F' = (G \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$

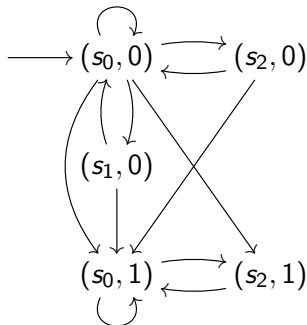
Les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux exécutions où G doit être infiniment souvent visité, alors que les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux exécutions où F ne doit plus être visité du tout.



Exemple équité conditionnelle



ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_2, 0), (s_0, 1), (s_2, 1)\}$



Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
 - Équité simple
 - Équité multiple
 - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
 - Équité faible
 - Équité forte
 - Équité sur les étiquettes



Équité faible sur les transitions

Soit $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions. F est dit faiblement équitable ssi dans toute exécution :

- l'ensemble d'états $S \setminus \text{dom}(F)$ est récurrent,
- ou l'ensemble de transitions F est récurrent.

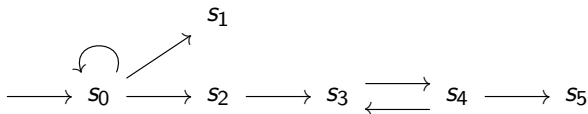
Ou, de manière équivalente,

- si l'ensemble d'états $S \setminus \text{dom}(F)$ n'est pas récurrent,
- alors l'ensemble de transitions F est récurrent.

L'équité faible exprime que l'on n'a pas le droit de rester indéfiniment dans un ensemble spécifié d'états alors qu'il existe toujours une transition en équité faible qui est exécutable.



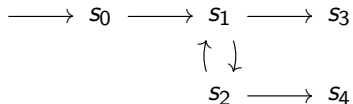
Exemple - équité faible



$$\text{Exec}(S) = \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_0, s_1), (s_0, s_0)\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$

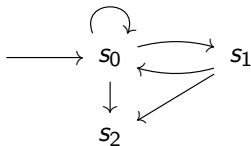
Exemple - équité faible



$Exec(S) =$

Équité faible	
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	

Exemple - équité faible



$Exec(S) =$

Équité faible	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	

Équivalence équité faible \leftrightarrow équité simple sur les états

On étudie le système $\langle S', I', R' \rangle$ tel que :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 1 \rangle \mid (s, s') \in R \cap F \}$
 $\cup \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 0 \rangle \mid (s, s') \in R \setminus F \}$
- Équité simple $F' = S \setminus \text{dom}(F) \times \{0, 1\} \cup S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F , les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F .



Équité forte sur les transitions

Soit $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions. F est dit fortement équitable ssi dans toute exécution,

- l'ensemble d'états $dom(F)$ n'est pas récurrent,
- ou l'ensemble de transitions F est récurrent.

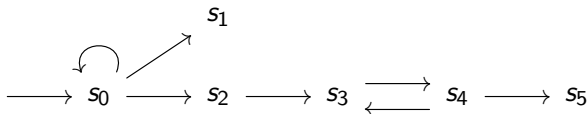
Ou, de manière équivalente,

- si l'ensemble d'états $dom(F)$ est récurrent,
- alors l'ensemble de transitions F est récurrent.

L'équité forte exprime que si l'on passe infiniment souvent dans un état où une transition de r est exécutable, alors une transition (s, s') de r finit par être exécutée.



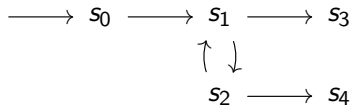
Exemple - équité forte



$$\text{Exec}(S) = \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_3, s_4), (s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$

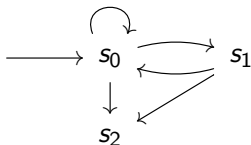
Exemple - équité forte



$Exec(S) =$

Équité forte	
$\{(s_2, s_4)\}$	

Exemple - équité forte



$Exec(S) =$

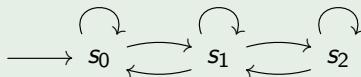
Équité forte	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	

Combinaisons d'équités faibles/fortes

En pratique, on se donne

- plusieurs ensembles de transitions en équité faible,
- plusieurs ensembles de transitions en équité forte.

Le système doit respecter toutes ces contraintes (la conjonction).



Équité faible sur $\{(s_0, s_1)\}$ (interdit le bégaiement définitif)

Équité faible sur $\{(s_1, s_2)\}$ (idem)

Équité faible sur $\{(s_2, s_1)\}$ (idem)

Équité forte sur $\{(s_1, s_2)\}$ (ici, équivalent à équité simple sur $\{s_2\}$)

Équivalence équité forte \leftrightarrow équité simple sur les états

On étudie le système $\langle S', I', R' \rangle$ tel que :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 1 \rangle \mid (s, s') \in R \cap F \}$
 $\cup \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 0 \rangle \mid (s, s') \in R \setminus F \}$
- Équité conditionnelle $F' = \text{dom}(F) \times \{0, 1\}$
 $G' = S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F , les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F .



Équité sur les étiquettes

Dans le cas d'un système de transitions étiqueté, on peut également définir l'équité (faible ou forte) sur un ensemble d'étiquettes $F \subseteq L$.

Cela revient à l'équité sur les transitions $Etiq^{-1}(F)$.

