Troisième partie

L'équité dans les systèmes de transitions

Plan

1. Contraintes d'équité
2. Équité sur les états
   - Équité simple
   - Équité multiple
   - Équité conditionnelle
3. Équité sur les transitions
   - Équité faible
   - Équité forte
   - Équité sur les étiquettes

Contraintes d'équité / *fairness*

Les contraintes d'équité spécifient que certains états (resp. certaines transitions) doivent être visités (resp. exécutées) infiniment souvent dans toute exécution du programme.

D'une façon générale, les contraintes d'équité servent à contraindre un programme ou son environnement à être vivace, sans entrer dans les détails concernant la réalisation pratique de ces contraintes.

Les contraintes d'équité réduisent l'ensemble des exécutions légales, en éliminant les exécutions qui ne respectent pas les contraintes d'équité.

Rappel : états/transitions récurrentes

Ensemble d'états récurrent

Rappel : $Inf_S(P, \sigma) \triangleq P$ est un ensemble d'états récurrent dans σ i.e. P apparaît une infinité de fois dans σ (cas σ infini) ou l'état final de σ est dans P (cas σ fini).

Ensemble de transitions récurrent

$Inf_T(Q, \sigma) \triangleq Q$ est un ensemble de transitions récurrent dans σ i.e. Q apparaît une infinité de fois dans σ (cas σ infini) ou la transition finale de σ est dans Q (cas σ fini).

Plan

1. Contraintes d'équité
2. Équité sur les états
   - Équité simple
   - Équité multiple
   - Équité conditionnelle
3. Équité sur les transitions
   - Équité faible
   - Équité forte
   - Équité sur les étiquettes

Équité simple sur les états

Équité simple

On se donne $F \subseteq S$ un ensemble d'états équitables.
Alors toute exécution σ doit être telle que $Inf_S(F, \sigma)$.

F est récurrent dans σ, i.e. σ contient une infinité d'états dans F (cas σ infini), ou le dernier état de σ est dans F (cas σ fini).

Exemple - équité simple

$$\begin{tikzcd}
 & & s_1 & & & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
Exec(S) \quad = \quad & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \\
& \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \\
& \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \\
& \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle
\end{aligned}$$

Équité simple	Exécutions
$\{s_0\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle$
$\{s_1, s_4\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle$
$\{s_1, s_5\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$

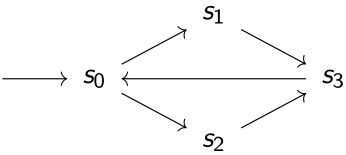
Exemple - équité simple

$$\begin{tikzcd}
 & & s_1 \arrow[dr] & \\
 \arrow[r] & s_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & s_3 \arrow[ll] \\
 & & s_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On fixe : équité simple sur $\{s_1\}$.

légale	$\langle(s_0 \to s_1 \to s_3)^\omega\rangle$
légale	$\langle(s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega\rangle$
illégale	$\langle(s_0 \to s_1 \to s_3)^\star \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega\rangle$
légale	$\langle(s_0 \to s_1 \to s_3 \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\star)^\omega\rangle$

Exemple - équité simple



$$Exec(S) \quad =$$

Équité simple	
$\{s_2\}$ $\{s_1, s_2\}$	

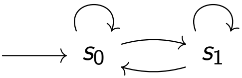
Équité multiple sur les états

Équité multiple

On se donne un ensemble dénombrable, indexable par un ensemble d'entiers $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$, d'ensembles équitables $\{F_i\}_{i \in J}$.
Toute exécution σ doit être telle que $\forall i \in J : Inf_S(F_i, \sigma)$.

Exécutions vérifiant l'équité multiple = intersection des exécutions vérifiant l'équité simple sur chacun des F_i.

Exemple - équité multiple



$$Exec(S) \quad =$$

Équité simple/multiple	
$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_1\}$	
$\{s_0\}\{s_1\}$	

Équivalence équité multiple finie $\leftrightarrow$ simple

Cas simple : J est fini. $|J|$ est la cardinalité de J.

Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times J$
- $I' = I \times \{0\}$
- $$\begin{aligned} R' = \quad & \{(\langle s,j\rangle, \langle s', j+1 \bmod |J|\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ \cup \quad & \{(\langle s,j\rangle, \langle s', j\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{aligned}$$
- Équité simple $F' = F_0 \times \{0\}$

Le premier ensemble de R' est pour le cas où on visite un état de F_j et on cherche donc à visiter l'ensemble suivant ; le deuxième ensemble est pour le cas où on n'est pas en train de visiter un état de F_j, que l'on continue à attendre.

Exemple équité multiple

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & s_1 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$ avec équité multiple : $F_0 = \{s_0\}, F_1 = \{s_1\}$

ST en équité simple équivalent :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & (s_0, 0) \arrow[r] \arrow[dr, bend left] & (s_0, 1) \arrow[loop above] \arrow[d] \\ & (s_1, 0) \arrow[u] \arrow[loop below] & (s_1, 1) \arrow[l] \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

avec équité simple sur $\{(s_0, 0)\}$

Équivalence équité multiple ↔ simple

Cas général (J potentiellement infini).

Le système $\langle S', I', R' \rangle$ à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times J \times J$
- $I' = I \times \{0\} \times \{0\}$
- $R' =$

$$\begin{array}{ll} & \{(\langle s,i,i\rangle, \langle s', i \oplus 1, 0\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s \in F_i\} \\ \cup & \{(\langle s,i,j\rangle, \langle s', i, j+1\rangle) \mid j < i \wedge (s,s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ \cup & \{(\langle s,i,j\rangle, \langle s', i, j\rangle) \mid (s,s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{array}$$

- Équité simple $F' = F_0 \times J \times \{0\}$

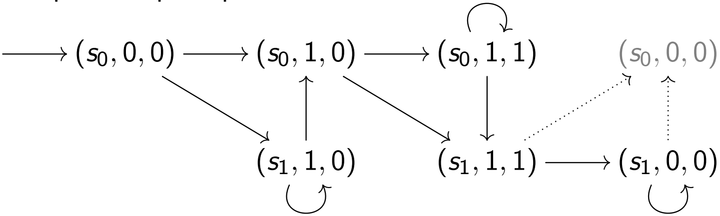
avec : $i \oplus 1 \triangleq \begin{cases} i+1 & \text{si } J \text{ est infini} \\ i+1 \bmod |J| & \text{sinon} \end{cases}$

Une exécution typique des compteurs i, j forme un triangle :
$\langle (0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,0) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (3,0) \rightarrow \ldots \rangle$

Exemple équité multiple

avec équité multiple : $F_0 = \{s_0\}, F_1 = \{s_1\}$

ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_0, 0, 0), (s_0, 1, 0)\}$

Équité conditionnelle sur les états

Équité conditionnelle

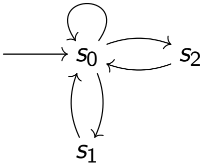
On se donne deux ensembles F et G. Toute exécution σ doit être telle que $Inf_S(F, \sigma) \Rightarrow Inf_S(G, \sigma)$.

Si F est récurrent dans σ, alors G doit être récurrent dans σ.

$$\begin{tikzcd}
 & & s_1 & & & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5
\end{tikzcd}$$

Équité cond.	Exécutions
$\{s_0\} \Rightarrow \{s_5\}$	$\langle {s_0}^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle {s_0}^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{s_3\} \Rightarrow \{s_4\}$	$\langle {s_0}^\omega \rangle, \langle {s_0}^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle {s_0}^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$

Exemple - équité conditionnelle



$$Exec(S) \quad =$$

Équité cond.	
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	

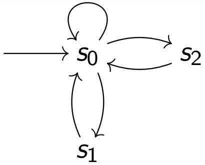
Équivalence équité conditionnelle $\leftrightarrow$ simple

On étudie le système $\langle S', I', R' \rangle$ tel que :

- $S' = (S \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{(\langle s, i \rangle, \langle s', j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge 1 \geq j \geq i \geq 0\} \cap (S' \times S')$
- Équité simple $F' = (G \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$

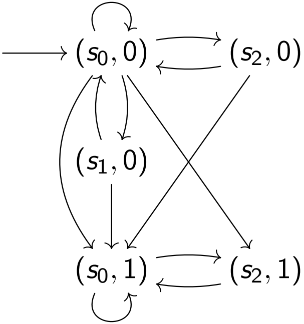
Les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux exécutions où G doit être infiniment souvent visité, alors que les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux exécutions où F ne doit plus être visité du tout.

Exemple équité conditionnelle



avec équité conditionnelle : $F = \{s_1\}, G = \{s_2\}$

ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur $\{(s_2, 0), (s_0, 1), (s_2, 1)\}$

Plan

Équité faible sur les transitions

Équité faible

Soit $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions. F est dit faiblement équitable ssi dans toute exécution σ :

- $Inf_s(S \setminus dom(F), \sigma) \vee Inf_T(F, \sigma)$
- l'ensemble d'états $S \setminus dom(F)$ est récurrent,
  ou l'ensemble de transitions F est récurrent.

Ou, de manière équivalente,

- $\neg Inf_s(S \setminus dom(F), \sigma) \Rightarrow Inf_T(F, \sigma)$
- si l'ensemble d'états $S \setminus dom(F)$ n'est pas récurrent,
  alors l'ensemble de transitions F est récurrent.

L'équité faible exprime que l'on n'a pas le droit de rester indéfiniment dans un ensemble spécifié d'états alors qu'il existe toujours une transition en équité faible qui est exécutable.

Exemple - équité faible

$$\begin{tikzcd}
 & & s_1 & & & \\
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} Exec(S) \;=\; & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \\ & \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle,$ $\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_0, s_1), (s_0, s_0)\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle,$ $\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle,$ $\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$

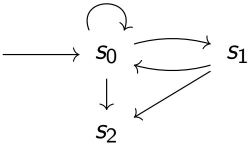
Exemple - équité faible

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & s_3 \\
 & & s_2 \arrow[r] \arrow[u, shift left] & s_4
\end{tikzcd}
$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité faible	
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	

Exemple - équité faible



$$Exec(S) \quad =$$

Équité faible	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	

Équivalence équité faible $\leftrightarrow$ équité simple sur les états

On étudie le système $\langle S', I', R' \rangle$ tel que :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \begin{array}{l} \;\;\{\langle s, \_\rangle, \langle s', 1\rangle) \mid (s, s') \in R \cap F\} \\ \cup\{\langle s, \_\rangle, \langle s', 0\rangle) \mid (s, s') \in R \setminus F\} \end{array}$
- Équité simple $F' = S \setminus dom(F) \times \{0, 1\} \;\cup\; S \times \{1\}$

Les états $\langle s, 1\rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F, les états $\langle s, 0\rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F.

Équité forte sur les transitions

Équité forte

Soit $F \subseteq R$ un sous-ensemble des transitions. F est dit fortement équitable ssi dans toute exécution σ :

- $\neg Inf_s(dom(F), \sigma) \vee Inf_T(F, \sigma)$
- l'ensemble d'états $dom(F)$ n'est pas récurrent, ou l'ensemble de transitions F est récurrent.

Ou, de manière équivalente,

- $Inf_S(dom(F), \sigma) \Rightarrow Inf_T(F, \sigma)$
- si l'ensemble d'états $dom(F)$ est récurrent, alors l'ensemble de transitions F est récurrent.

L'équité forte exprime que si l'on passe infiniment souvent dans un état où une transition de r est exécutable, alors une transition (s, s') de r finit par être exécutée.

Exemple - équité forte

$$\begin{tikzcd}
 & & s_1 & & & \\
\arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[ur] \arrow[r] & s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r, shift left] & s_4 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & s_5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} Exec(S) \quad = \quad & \langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle, \\ & \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle \end{aligned}$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle,$ $\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$
$\{(s_3, s_4), (s_4, s_5)\}$	$\langle {s_0}^{\omega} \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_1 \rangle, \langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{\omega} \rangle,$ $\langle {s_0}^{+} \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^{+} \rightarrow s_5 \rangle$

Exemple - équité forte

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & s_3 \\
& & s_2 \arrow[r] \arrow[u, shift left] & s_4
\end{tikzcd}$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité forte	
$\{(s_2, s_4)\}$	

Exemple - équité forte

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] \arrow[d] & s_1 \arrow[l, bend left] \arrow[dl] \\
& s_2 &
\end{tikzcd}
$$

$$Exec(S) \quad =$$

Équité forte	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	

Équivalence équité forte $\leftrightarrow$ équité simple sur les états

On étudie le système $\langle S', I', R' \rangle$ tel que :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \begin{array}{l} \{\langle s, \_ \rangle, \langle s', 1 \rangle) \mid (s, s') \in R \cap F\} \\ \cup \{\langle s, \_ \rangle, \langle s', 0 \rangle) \mid (s, s') \in R \setminus F\} \end{array}$
- Équité conditionnelle $\begin{array}{l} F' = dom(F) \times \{0, 1\} \\ G' = S \times \{1\} \end{array}$

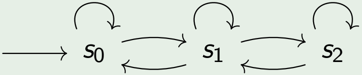
Les états $\langle s, 1 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de F, les états $\langle s, 0 \rangle$ correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans F.

Combinaisons d'équités faibles/fortes

En pratique, on se donne

- plusieurs ensembles de transitions en équité faible,
- plusieurs ensembles de transitions en équité forte.

Le système doit respecter toutes ces contraintes (la conjonction).



Équité faible sur $\{(s_0, s_1)\}$ (interdit le bégaiement définitif)
Équité faible sur $\{(s_1, s_2)\}$ (idem)
Équité faible sur $\{(s_2, s_1)\}$ (idem)
Équité forte sur $\{(s_1, s_2)\}$ (interdit de ne jamais aller en s_2)

Ici, équivalent à équité multiple sur $\{\{s_1\}, \{s_2\}\}$: toute exécution où s_1 et s_2 apparaissent infiniment souvent.

Équité sur les étiquettes

Dans le cas d'un système de transitions étiqueté, on peut également définir l'équité (faible ou forte) sur un ensemble d'étiquettes $F \subseteq L$.

Cela revient à l'équité sur les transitions $Etiq^{-1}(F)$.