Systèmes de transitions

Philippe Quéinnec, Xavier Thirioux

Département Informatique et Mathématiques appliquées
ENSEEIHT

23 janvier 2017

Méthodes formelles ?

Pourquoi ?

- Nécessité de prouver qu'un programme possède bien les propriétés attendues
- C'est dur $\Rightarrow$ nécessité de cadres formels précis et d'outils

Comment ?

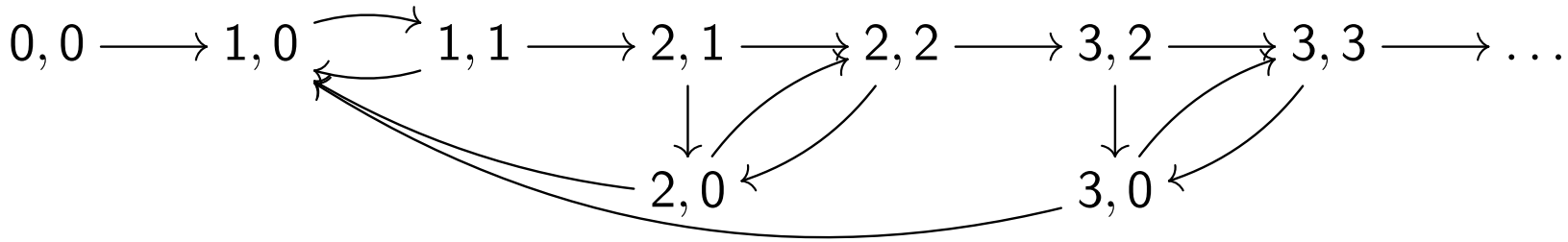
- Langage classique : état = valeurs des variables + *flot de contrôle implicite*
- Système de transitions : état = valeurs des variables. flot de contrôle *explicite*

Exemple

Soit trois processus exécutant concurremment (par entrelacement) :

boucle	boucle	boucle
$x \leftarrow y + 1$	$y \leftarrow x$	$y \leftarrow 0$

1. Description du système en termes d'états ?



2. Propriétés :
   - L'état $4, 2$ est-il accessible ?
   - Le système s'arrête-t-il ? Toujours, parfois ?
   - Est-il toujours vrai que $y = 0 \vee 0 \leq x - y \leq 1$?
   - Si $y = 6$, est-il possible/nécessaire que x devienne > 6 ?
   - Est-il possible/nécessaire que y soit non borné ?

Approche TLA$^+$

Temporal Logic of Actions

1. Un langage de spécification logique (LTL / Logique temporelle linéaire) $\approx$ quelles sont les propriétés attendues
2. Un langage d'actions $\approx$ un langage de spécification plus opérationnel $\approx$ un langage de programmation
3. (en fait, langage de spécification = langage d'actions)
4. Cadre formel = système de transitions

Auteurs : Leslie Lamport, Martín Abadi

Plan du cours

1. Systèmes de transitions
2. TLA$^+$: les actions
3. Équité dans les systèmes de transitions
4. Logique temporelle linéaire LTL
5. TLA$^+$: la logique et l'équité
6. Logique temporelle arborescente CTL

Première partie

Systèmes de transitions

Introduction

Objectifs

Représenter les exécutions d'un programme en faisant abstraction de certains détails :

- les détails sont la cause d'une explosion du nombre d'états et de la complexité des traitements.
- ne conserver que ce qui est pertinent par rapport aux propriétés attendues.

Utilisation

Un système de transitions peut être construit :

- *avant* l'écriture du programme, pour explorer la faisabilité de celui-ci.
  Le programme final est un raffinement en utilisant le système de transitions comme guide.
- *après* l'écriture du programme, par abstraction, en ne conservant que les aspects significatifs du programme réel.

Plan

Système de transitions

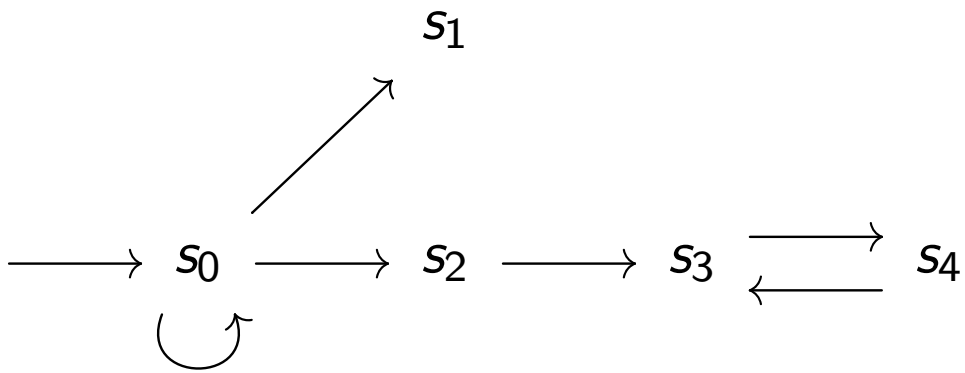
ST

Un système de transitions est un triplet $\langle S, I, R \rangle$.

- S : ensemble d'états. Peut être fini ou infini.
- $I \subseteq S$: ensemble des états initiaux.
- $R \subseteq S \times S$: relation (de transitions) entre paires d'états. $(s, s') \in R$ signifie qu'il existe une transition faisant passer le système de l'état s à l'état s'.

Exemple - système de transitions

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$I = \{s_0\}$$
$$R = \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_4), (s_4, s_3)\}$$



Séquences

Séquence

Soit S un ensemble.
$S^\star \triangleq$ l'ensemble des séquences finies sur S.
$S^\omega \triangleq$ l'ensemble des séquences infinies sur S.
$\sigma_i \triangleq$ le $i^{\text{ème}}$ (à partir de 0) élément d'une séquence σ.

Conventions de représentation :

- Une séquence s est notée sous la forme : $\langle s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \ldots \rangle$.
- $\langle\rangle$: la séquence vide.

Pour une séquence finie σ :

- $\sigma^\star \triangleq$ l'ensemble des séquences finies produites par la répétition arbitraire de σ.
- $\sigma^+ \triangleq \sigma^* \setminus \{\langle\rangle\}$
- $\sigma^\omega \triangleq$ la séquence infinie produite par la répétition infinie de σ.

Traces

Traces finies

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.
On appelle trace finie une séquence finie $\sigma \in S^\star$ telle que :

- $\sigma = \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \ldots \rightarrow s_{n-1} \rightarrow s_n \rangle$
- $\forall i \in [0..n[: (s_i, s_{i+1}) \in R$

Traces finies maximales

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.
Une trace finie $\langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \ldots \rightarrow s_{n-1} \rightarrow s_n \rangle \in S^\star$ est maximale ssi il n'existe pas d'état successeur à s_n, i.e. $\forall s \in S : (s_n, s) \notin R$.

Une trace maximale va le plus loin possible.

Traces infinies

Traces infinies

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions, et $s_0 \in S$.
On appelle trace infinie à partir de s_0 un élément $tr \in S^\omega$ tel que :

- $tr = \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \ldots \rangle$
- $\forall i \in \mathbb{N} : (s_i, s_{i+1}) \in R$

Traces

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions, et $s \in S$.
$Traces(s) \stackrel{\Delta}{=}$ l'ensemble des traces infinies ou finies maximales commençant à l'état s.

Exécutions

Exécutions

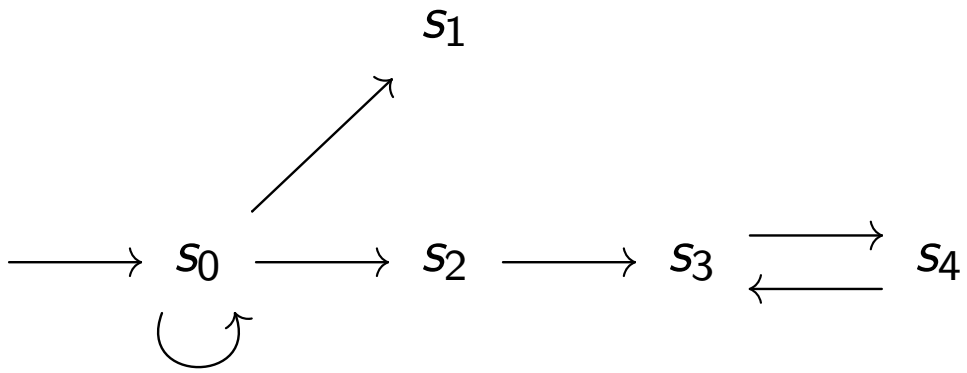
Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.
Une exécution $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \ldots \rangle$ est une trace infinie ou finie maximale telle que $s_0 \in I$.
$Exec(\mathcal{S}) \triangleq$ l'ensemble des exécutions de $\mathcal{S}$.

On a une (seule et unique) exécution vide $\langle\rangle$ ssi $I = \emptyset$.

Préfixe d'exécution

Pour σ une exécution, un préfixe d'exécution est une trace finie $\sigma_p = \langle s_0 \rightarrow \ldots \rightarrow s_n \rangle$ telle que $s_0 \in I$ et $\sigma = \sigma_p \rightarrow \ldots$.
s_n est appelé l'état final de ce préfixe.

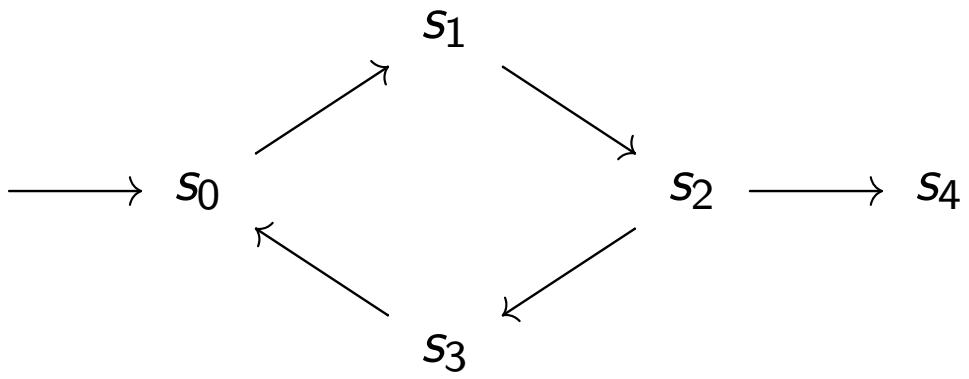
Exemple - traces



$s_0 \to s_0 \to s_2 \to s_3$ est une trace finie non maximale

$$
\begin{aligned}
Traces(s_1) &= \langle s_1 \rangle \\
Traces(s_3) &= \langle (s_3 \to s_4)^\omega \rangle \\
Traces(s_2) &= \langle s_2 \to (s_3 \to s_4)^\omega \rangle \\
Traces(s_0) &= \langle {s_0}^\omega \rangle, \langle {s_0}^+ \to s_1 \rangle, \langle {s_0}^+ \to s_2 \to (s_3 \to s_4)^\omega \rangle \\
Exec(\mathcal{S}) &= Traces(s_0)
\end{aligned}
$$

Exemple 2 - traces, exécutions

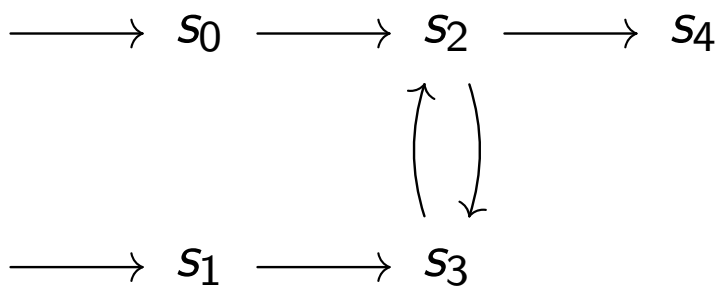


$Traces(s_2) =$

$Traces(s_0) =$

$Exec(\mathcal{S}) =$

Exemple 3 - traces, exécutions



$Traces(s_2) =$

$Traces(s_0) =$

$Traces(s_1) =$

$Exec(\mathcal{S}) =$

États accessibles

État accessible

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.
$s \in S$ est un état accessible ssi il existe un préfixe d'exécution dont l'état final est s.
$Acc(\mathcal{S}) \stackrel{\Delta}{=}$ l'ensemble des états accessibles de $\mathcal{S}$.

États récurrents

État récurrent

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions et $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \ldots \rangle$ une exécution.

- σ infinie : un état s est récurrent ssi $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j = s$ (s apparaît une infinité de fois dans σ).
- σ finie : un état s est récurrent ssi il est l'état final de σ.

$Inf_S(\sigma) \stackrel{\Delta}{=}$ l'ensemble des états récurrents de σ.

Transitions récurrentes

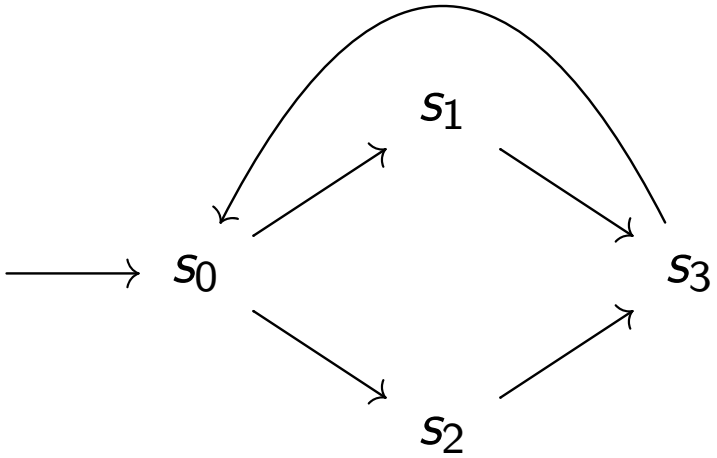
Transition récurrente

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions et $\sigma = \langle s_0 \to \ldots \rangle$ une exécution.

- σ infinie : une transition $s \to s'$ est récurrente ssi
  $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j = s \wedge s_{j+1} = s'$
  ($s \to s'$ apparaît une infinité de fois dans σ).
- σ finie : une transition $s \to s'$ est récurrente ssi elle est la transition finale de σ
  ($\sigma = \langle s_0 \to \ldots \to s \to s' \rangle$).

$Inf_T(\sigma) \stackrel{\Delta}{=}$ l'ensemble des transitions récurrentes de σ.

Exemple - états récurrents



s_1	récurrent dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^\omega \rangle$
s_1	récurrent dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
s_1	pas récurrent dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^* \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
$s_1 \to s_3$	récurrente dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$
$s_1 \to s_3$	pas récurrente dans	$\langle (s_0 \to s_1 \to s_3)^* \to (s_0 \to s_2 \to s_3)^\omega \rangle$

Graphe des exécutions

Graphe des exécutions

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.

Le graphe des exécutions est le graphe orienté où :

- l'ensemble des sommets est $Acc(\mathcal{S})$;
- l'ensemble des arêtes orientées est R, restreint aux seuls états accessibles.

Il s'agit donc du graphe $\langle S \cap Acc(\mathcal{S}), R \cap (Acc(\mathcal{S}) \times Acc(\mathcal{S})) \rangle$.

Système de transitions étiqueté

ST étiqueté

Un système de transitions étiqueté est un quintuplet $\langle S, I, R, L, Etiq \rangle$.

- S : ensemble d'états.
- $I \subseteq S$: ensemble des états initiaux.
- $R \subseteq S \times S$: relation de transitions entre paires d'états.
- L : ensemble d'étiquettes.
- $Etiq$: fonction qui associe une étiquette à chaque transition : $Etiq \in R \to L$.

Un ST étiqueté se rapproche beaucoup des automates.
Mais : pas d'état terminal + exécution infinie.

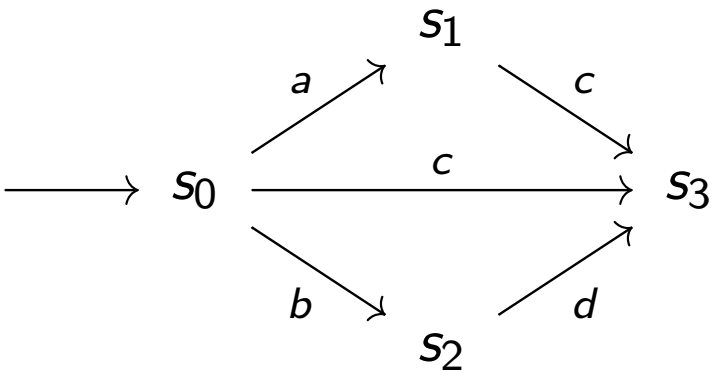
Équivalence aux ST sans étiquette

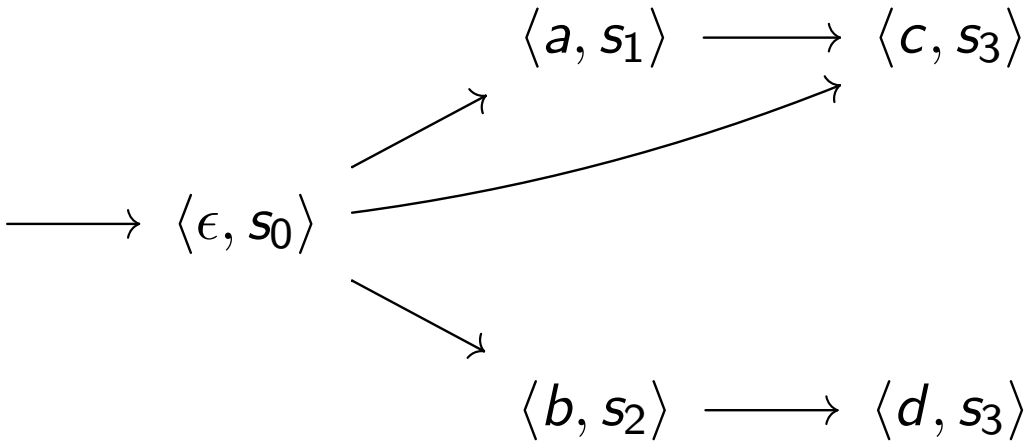
Un système de transitions étiqueté $\langle S, I, R, L, Etiq \rangle$ est équivalent au système sans étiquette $\langle S', I', R' \rangle$ défini par :

- $S' = (L \cup \{\epsilon\}) \times S$
- $I' = \{\epsilon\} \times I$
- $R' = \{(\langle I, s \rangle, \langle I', s' \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge I' = Etiq(s, s')\}$

Une transition $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ devient $\langle \_, s_1 \rangle \longrightarrow \langle a, s_2 \rangle$, où _ est n'importe quelle étiquette.

Exemple - équivalence avec/sans étiquette





Différences avec un automate

Système de transitions $\neq$ automate

- Pas d'étiquette sur les transitions (ou comme si)
- Une transition n'est pas causée par l'environnement
- Pas d'états terminaux
- Nombre d'états infini possible
- Exécution infinie possible

Plan

Représentation en extension

Donnée en extension du graphe des exécutions, par exemple sous forme graphique ou par l'ensemble des sommets et arêtes.
Ne convient que pour les systèmes de transitions où le nombre d'états et de transitions est fini.

Représentation en intention

Représentation symbolique à l'aide de variables.

Système de transitions à base de variables

Triplet $\langle V, Init, Trans \rangle$ où

- $V = \{v_i\}_{i \in I}$: ensemble fini de variables.
- $Init(\{v_i\}_{i \in I})$: prédicat définissant les états initiaux et portant sur les variables v_i.
- $Trans(\{v_i, v_i'\}_{i \in I})$: prédicat définissant les transitions, portant sur les variables v_i représentant l'état courant et les variables v_i' représentant l'état suivant.

Exemple : un compteur borné

```
i = 0;
while (i < N) {
  i = i+1;
}
```

Graphe d'exécution pour $N = 5$.

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

Symboliquement :

$V \triangleq i \in \mathbb{N}$

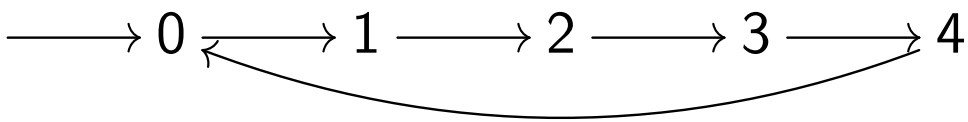
$I \triangleq i = 0$

$R \triangleq i < N \wedge i' = i + 1$ ou $R \triangleq i' \leq N \wedge i' - i = 1$

Exemple : un compteur cyclique

```
i = 0;
while (true) {
  i = (i+1) % N;
}
```

Graphe d'exécution pour $N = 5$.



Symboliquement :

$V \triangleq i \in \mathbb{N}$

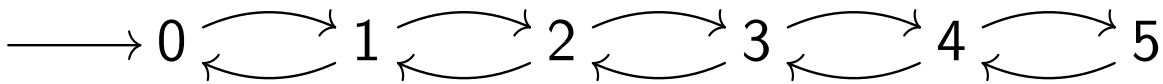
$I \triangleq i = 0$

$R \triangleq i' = (i + 1) \bmod N$

Exemple : un entier oscillant

```
i = 0;
while (true) {
    i > 0 -> i = i - 1;
  or
    i < N -> i = i + 1;
}
```

Graphe d'exécution pour $N = 5$.



Symboliquement :

$V \triangleq i \in \mathbb{N}$

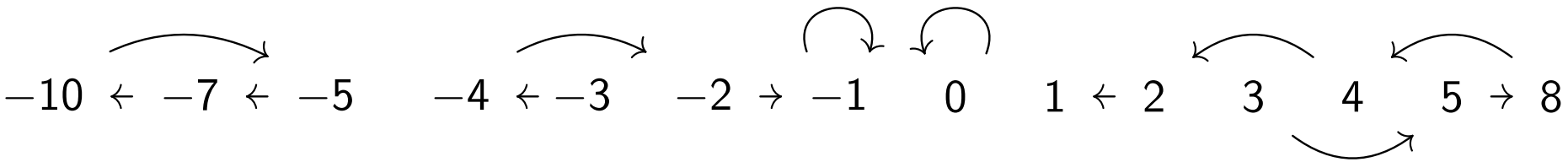
$I \triangleq i = 0$

$R \triangleq i > 0 \wedge i' = i - 1 \quad \vee \; i < N \wedge i' = i + 1$ ou $R \triangleq |i' - i| = 1 \wedge 0 \leq i' \leq N$

Exemple : le problème de Collatz

```
void Collatz(int n) {
  while (n != 1)
    if (n mod 2 = 0) n = n / 2; else n = (3*n + 1) / 2;
}
```

Graphe d'exécution pour $-5 \leq n \leq 5$ initialement.



Symboliquement :

$$V \triangleq n \in \mathbb{N}$$

$$I \triangleq -5 \leq n \leq 5$$

$$R \triangleq n \neq 1 \ \wedge \begin{pmatrix} (n' = n/2 \wedge n \equiv 0[2]) \\ \vee (n' = (3n+1)/2 \wedge n \equiv 1[2]) \end{pmatrix}$$

ST correspondant

Le système de transitions correspondant est $\langle S, I, R \rangle$ où :

- $S = \Pi_{i \in I} D_i$, où $\{D_i\}_{i \in I}$ sont les domaines (types) de $\{v_i\}_{i \in I}$
- $I = \mathit{Init}(\{v_i\}_{i \in I})$
- $R = \mathit{Trans}(\{v_i, v_i'\}_{i \in I})$

Prédicats

Prédicat d'état

Un prédicat d'état est un prédicat portant sur les variables (d'état) d'un système donné en intention.

Un prédicat d'état peut être vu comme la fonction caractéristique d'une partie de S.

Prédicat de transition

Un prédicat de transitions est un prédicat portant sur les variables (d'état) primées et non primées.

Un prédicat de transitions peut être vu comme la fonction caractéristique d'une partie de $S \times S$.

Exemple - prédicats

$$
\begin{array}{lcl}
V & \triangleq & n \in \mathbb{N} \\
I & \triangleq & -5 \leq n \leq 5 \\
R & \triangleq & n \neq 1 \ \wedge \left(\begin{array}{c} (n' = n/2 \wedge n \equiv 0[2]) \\ \vee (n' = (3n+1)/2 \wedge n \equiv 1[2]) \end{array} \right)
\end{array}
$$

Prédicats d'état : I, $n < 20$

Prédicats de transition : R, $n' - n > 3$

Plan

Déterminisme

Déterminisme fort

Un système est déterministe fort $\stackrel{\Delta}{=}$ la relation de transition est fonctionnelle, i.e. $\forall s \in S : |\{s' \in S : (s, s') \in R\}| \leq 1$.

Déterminisme opérationnel

Un système est déterministe au sens opérationnel $\stackrel{\Delta}{=}$ la relation de transition *restreinte aux états accessibles* est fonctionnelle.

Note : ST étiqueté déterministe $\neq$ automate déterministe
(les étiquettes ne comptent pas)

Déterminisme – exemple

$$
\begin{array}{lcl}
V & \triangleq & n \in \mathbb{N} \\
I & \triangleq & n = 0 \\
R & \triangleq & \quad n \leq 4 \ \wedge \ n' = n + 1 \\
 & & \vee \ n\%3 = 0 \ \wedge \ n' - n = 1 \\
 & & \vee \ n \geq 6 \ \wedge \ n' = n + 2
\end{array}
$$

Graphe d'exécution : $\longrightarrow 0 \rightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \rightarrow 4 \qquad 5 \qquad 6 \longrightarrow 7 \ldots$ et $6 \searrow 8 \ldots$

Déterministe opérationnellement, mais pas fortement déterministe.

Blocage

Interblocage

Un système possède un interblocage (deadlock) $\stackrel{\Delta}{=}$ il existe un état accessible sans successeur par la relation R.
De manière équivalente un système possède un interblocage s'il existe des exécutions finies.

Pour les systèmes modélisant des programmes séquentiels classiques, l'interblocage est équivalent à la terminaison.

Boucle

Un système possède une boucle (livelock) $\stackrel{\Delta}{=}$ il existe un état accessible dont le seul successeur par la relation R est lui-même.

Réinitialisable

Réinitialisable

Un système est réinitialisable $\stackrel{\Delta}{=}$ depuis tout état accessible, il existe une trace finie menant à un état initial.

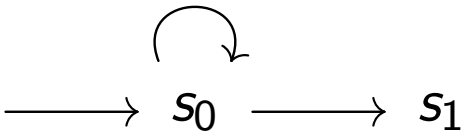
Cette propriété signifie qu'à n'importe quel moment, il existe une séquence d'actions pour revenir à l'état initial du système et ainsi redémarrer.

Bégaiement

Bégaiement

Un système de transitions bégaie ssi tout état possède une boucle vers lui-même : $R \supseteq Id$.

Utilité :

- Modéliser l'avancement arbitraire : 

on peut aller en s_1 après être resté arbitrairement longtemps en s_0.
- N'avoir que des exécutions infinies : tout état sans successeur (dans un système sans bégaiement) a un unique successeur avec bégaiement : lui-même. La terminaison (l'interblocage) $\ldots \to s_i$ est alors $\ldots \to {s_i}^{\omega}$.
- Composer plusieurs systèmes de transitions.

Composition de systèmes de transitions

Composition

La composition des ST avec bégaiement $\langle V_1, I_1, R_1 \rangle$ et $\langle V_2, I_2, R_2 \rangle$ est $\langle V, I, R \rangle$ où :

- $V \triangleq V_1 \cup V_2$ (union des variables)
- $I \triangleq I_1 \wedge I_2$ (les deux sous-systèmes démarrent dans un état initial respectif)
- $R \triangleq R_1 \wedge R_2$ (les deux sous-systèmes évoluent chacun selon ses transitions)

Comme R_1 et R_2 peuvent bégayer, $R_1 \wedge R_2$ signifie donc qu'on peut exécuter une transition de R_1 seule et R_2 bégayant, ou bien réciproquement, ou bien encore exécuter R_1 en même temps que R_2.

Exemple - composition

$$\left(\begin{array}{ll} V_1 \triangleq & i \in \mathbb{N} \\ I_1 \triangleq & i = 0 \\ R_1 \triangleq & i' = i + 1 \\ & \vee\ i' = i \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{ll} V_2 \triangleq & j \in \mathbb{N} \\ I_2 \triangleq & j = 0 \\ R_2 \triangleq & j' = j + 1 \\ & \vee\ j' = j \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ll} V \triangleq & i, j \in \mathbb{N} \\ I \triangleq & i = 0 \wedge j = 0 \\ R \triangleq & i' = i + 1 \wedge j' = j \\ & \vee i' = i \wedge j' = j + 1 \\ & \vee i' = i + 1 \wedge j' = j + 1 \\ & \vee i' = i \wedge j' = j \end{array}\right)$$