

# Septième partie

## Vérification de propriétés



# Objectif

Vérifier si un système possède une propriété donnée :  $\mathcal{M} \models P$ .

Si le système et la propriété sont dans le même formalisme (cas de TLA<sup>+</sup>), cela revient à vérifier si  $\mathcal{M} \Rightarrow P$ .



# Plan

- 1 Vérification par preuve
- 2 Vérification de modèles
  - Construction de l'espace d'états
  - CTL logique temporelle arborescente
  - LTL logique temporelle linéaire



# TLA<sup>+</sup> Proof System (TLAPS)

## TLAPS

- Un assistant de preuve pour TLA<sup>+</sup>
- Écriture manuelle de la preuve selon une structure hiérarchique
- Chaque étape est mécaniquement vérifiée, soit directement, soit par des démonstrateurs externes :
  - SMT (logique du premier ordre, arithmétique)
  - Zenon (logique du premier ordre)
  - Isabelle (théorie des ensembles, induction, second ordre)
  - PTL (propositional temporal logic)
- Obtention d'un certificat formel vérifiable



Exemple : *xyplus1* (spécification)MODULE *xyplus1*EXTENDS *Naturals*, *FiniteSetTheorems*, *TLAPS*VARIABLES *x*, *y* $TypInv \triangleq (x \in Nat \wedge y \in Nat)$  $Ecart \triangleq (0 \leq x - y \wedge x - y \leq 1)$  $Init \triangleq x = 0 \wedge y = 0$  $Act1 \triangleq x' = y + 1 \wedge UNCHANGED \langle y \rangle$  $Act2 \triangleq y' = x \wedge UNCHANGED \langle x \rangle$  $Spec \triangleq Init \wedge \square [Act1 \vee Act2]_{\langle x, y \rangle}$

## Exemple : xyplus1 (preuves)

MODULE *xyplus1*

THEOREM *TypeInvOK*  $\triangleq$  *Spec*  $\Rightarrow$   $\square$ *TypeInv*

$\langle 1 \rangle 1$  *Init*  $\Rightarrow$  *TypeInv* BY DEF *Init*, *TypeInv*

$\langle 1 \rangle 2$  (*Act1*  $\vee$  *Act2*)  $\wedge$  *TypeInv*  $\Rightarrow$  *TypeInv'* BY DEF *Act1*, *Act2*, *TypeInv*

$\langle 1 \rangle 3$  UNCHANGED  $\langle x, y \rangle \wedge$  *TypeInv*  $\Rightarrow$  *TypeInv'* BY DEF *TypeInv*

$\langle 1 \rangle 4$  QED BY PTL,  $\langle 1 \rangle 1$ ,  $\langle 1 \rangle 2$ ,  $\langle 1 \rangle 3$  DEF *TypeInv*, *Spec*

THEOREM *EcartOK*  $\triangleq$  *Spec*  $\Rightarrow$   $\square$ *Ecart*

$\langle 1 \rangle 1$  *Init*  $\Rightarrow$  *Ecart* BY DEF *Init*, *Ecart*

$\langle 1 \rangle 2$  (*Act1*  $\vee$  *Act2*)  $\wedge$  *TypeInv*  $\wedge$  *Ecart*  $\Rightarrow$  *Ecart'*

$\langle 2 \rangle 1$  *Act1*  $\wedge$  *TypeInv*  $\wedge$  *Ecart*  $\Rightarrow$  *Ecart'* BY DEF *Act1*, *TypeInv*, *Ecart*

$\langle 2 \rangle 2$  *Act2*  $\wedge$  *TypeInv*  $\wedge$  *Ecart*  $\Rightarrow$  *Ecart'* BY DEF *Act2*, *TypeInv*, *Ecart*

$\langle 2 \rangle 3$  QED BY  $\langle 2 \rangle 2$ ,  $\langle 2 \rangle 1$

$\langle 1 \rangle 3$  UNCHANGED  $\langle x, y \rangle \wedge$  *Ecart*  $\Rightarrow$  *Ecart'* BY DEF *Ecart*

$\langle 1 \rangle 4$  QED BY PTL,  $\langle 1 \rangle 1$ ,  $\langle 1 \rangle 2$ ,  $\langle 1 \rangle 3$ , *TypeInvOK* DEF *Ecart*, *Spec*, *TypeInv*

THEOREM *Spec*  $\Rightarrow$   $\square$ (*TypeInv*  $\wedge$  *Ecart*) BY *TypeInvOK*, *EcartOK*

# Plan

- 1 Vérification par preuve
- 2 Vérification de modèles
  - Construction de l'espace d'états
  - CTL logique temporelle arborescente
  - LTL logique temporelle linéaire



# Principe

Le principe de la vérification est le parcours systématique et éventuellement exhaustif de l'espace d'états du système, afin de vérifier la compatibilité des exécutions avec les propriétés attendues. Cela nécessite un **système de transitions fini**.





# Analyse du problème

Pour construire le graphe d'états, on a besoin de :

- mémoriser les états déjà visités (*Anciens*) ;
- mémoriser les nouveaux états à explorer (*Nouveaux*). Il peut s'agir d'états successeurs ou prédécesseurs des états visités (selon que l'on construit le graphe depuis les états initiaux ou depuis des états dit terminaux, par exemple les états interdits).

L'ensemble des états visités finit par devenir beaucoup plus gros que l'ensemble des états courants, par simple accumulation → les ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$  n'auront pas nécessairement la même représentation mémoire pour des raisons d'efficacité.



Génération de modèle – TLA<sup>+</sup>
$$\text{Système} = \text{Init} \wedge \square[\text{Next}]$$

```
procedure MC(Init, Next)
```

```
begin
```

```
  A := {};  -- états explorés
```

```
  N := Init; -- états nouveaux, à explorer
```

```
  while (N  $\neq$  {})
```

```
  begin
```

```
    state := pop(N);  -- choix d'un état à explorer
```

```
    succ := state  $\wedge$  Next; -- états successeurs
```

```
    A := A  $\cup$  {state};  -- state a été traité
```

```
    N := N  $\cup$  (succ  $\setminus$  A); -- images nouvelles à explorer
```

```
  end;
```

```
  return A;  -- tout a été exploré
```

```
end
```

# Algorithme générique

```
procedure exploration(Init, Image, Pop, Push, Minus, Union)
begin
  A := {}; -- états explorés
  N := Init; -- états non explorés
  while (N ≠ {})
  begin
    choix := Pop(N); -- choix d'état(s) à explorer
    images := Image(choix) Minus A; -- Images non déjà explorées
    A := A Union choix; -- choix a été traité
    N := Push(N, images); -- ses images sont à explorer
  end;
  return A; -- tout a été exploré
end
```



## Prérequis pour l'efficacité

### États déjà visités

- **Représentation concise** en mémoire (très gros ensemble).
- Opérations pour l'ajout d'états nouveaux (Union).

### États nouveaux

- Opération pour la différence ensembliste avec les états déjà visités (Minus);
- Opération pour le calcul d'image directe ou inverse (Image);
- Représentation mémoire permettant de construire un **ordre global** (Pop et Push).



## Quelques solutions possibles

### Représentation des états déjà visités

- explicite : bit-state encoding, table de hachage (risque de collision).
- implicite : Binary Decision Diagrams ( $10^{1300}$ ), formules SAT ( $10^{1500}$ ), polyèdres...
- mixte : explicite + fingerprint

### Ordre global sur les états nouveaux

- parcours en profondeur (occupation mémoire limitée)
- parcours en largeur (petits contre-exemples)



# Plan

- 1 Vérification par preuve
- 2 Vérification de modèles
  - Construction de l'espace d'états
  - **CTL logique temporelle arborescente**
  - LTL logique temporelle linéaire



# Syntaxe alternative (rappel)

## Syntaxe alternative

A (all)  $\leftrightarrow \forall$

E (exists)  $\leftrightarrow \exists$

G (globally)  $\leftrightarrow \square$

F (finally)  $\leftrightarrow \diamond$

X (next)  $\leftrightarrow \circ$

$A(f \text{ U } g)$  ou  $f \text{ AU } g \leftrightarrow f \forall \mathcal{U} g$

$E(f \text{ U } g)$  ou  $f \text{ EU } g \leftrightarrow f \exists \mathcal{U} g$

Par exemple :  $AG \ EF \ f \leftrightarrow \forall \square \exists \diamond f$

# Principe

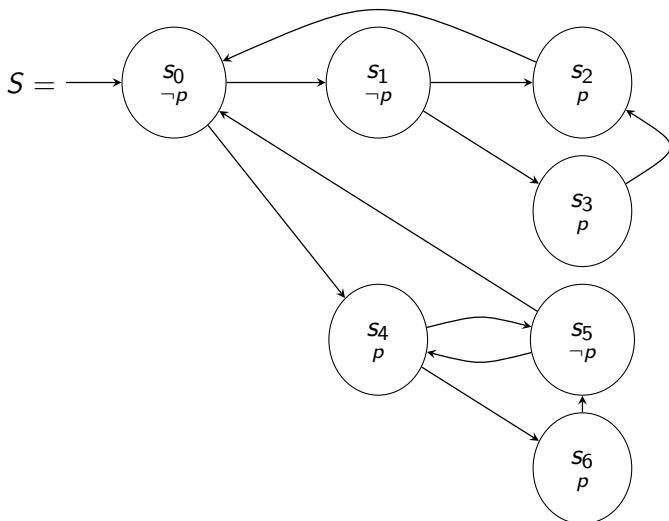
- Les modèles en CTL sont les états (et non les exécutions).
- Calcul de l'ensemble des états qui satisfont une formule donnée, de façon inductive sur la structure de la formule.
- On procède par marquage des états :  
 $s \mapsto \{F \mid s \models F\}$  (plutôt que  $F \mapsto \{s \mid s \models F\}$ ).
- Chaque opérateur d'une formule  $F$  peut amener un parcours complet de  $S$ .





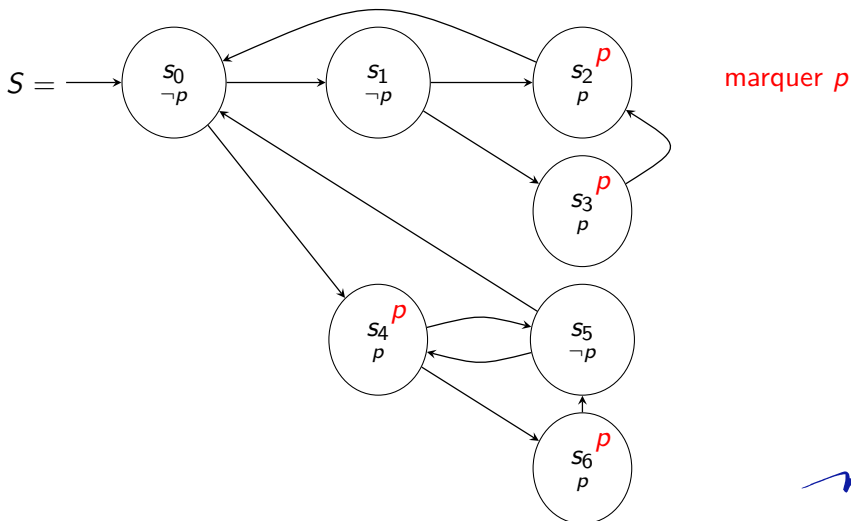
# Marquage : un exemple

$EF AX p$  = existence d'un état dont tous les successeurs vérifient  $p$ .



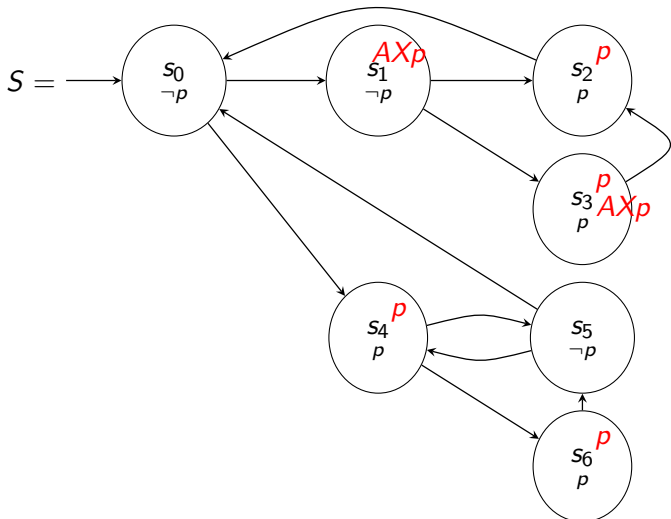
## Marquage : un exemple

$EF AX p$  = existence d'un état dont tous les successeurs vérifient  $p$ .



## Marquage : un exemple

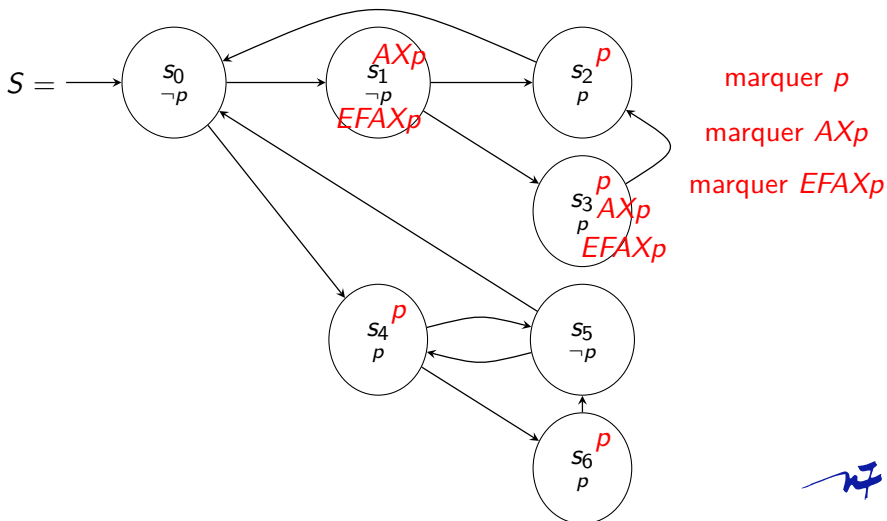
$EF AX p$  = existence d'un état dont tous les successeurs vérifient  $p$ .



marquer  $p$   
marquer  $AXp$

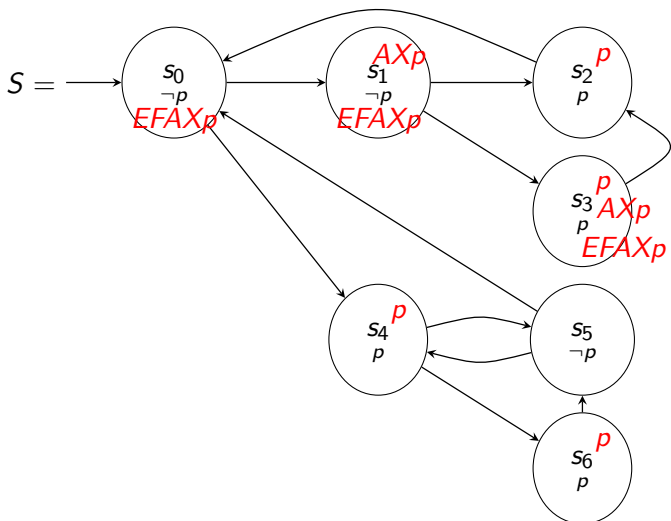
## Marquage : un exemple

$EF AX p$  = existence d'un état dont tous les successeurs vérifient  $p$ .



## Marquage : un exemple

$EF AX p$  = existence d'un état dont tous les successeurs vérifient  $p$ .



marquer  $p$   
marquer  $AXp$   
marquer  $EFAXp$   
en remontant

$s_0 \models EFAXp$   
donc  
 $S \models EFAXp$

## Marquage CTL : $mark(F)$

- Si  $F = p$  prédicat d'état, marquer les états qui vérifient le prédicat :

pourtout  $s \in S$  :  $s.F := eval(s,p)$

(où  $eval(s,p)$  permet d'évaluer un prédicat dans un état)

- Si  $F = \neg F'$ , marquer les états non marqués par  $F'$  :

$mark(F')$  ;

pourtout  $s \in S$  :  $s.F := not\ s.F'$  ;

- Si  $F = F_1 \wedge F_2$ , marquer les états marqués par les deux formules :

$mark(F_1)$  ;

$mark(F_2)$  ;

pourtout  $s \in S$  :  $s.F := s.F_1\ and\ s.F_2$  ;



## Marquage CTL : $mark(F)$

- Si  $F = EX G$ , marquer les états qui peuvent atteindre  $G$  en une transition :

```
mark(G);  
pourtout s ∈ S : s.F := false;  
pourtout s ∈ S, pourtout t ∈ succ(s) :  
    si t.G alors s.F := true;
```

- Si  $F = AX G$ , marquer les états qui atteignent  $G$  par toutes les transitions :

```
mark(G);  
pourtout s ∈ S : s.F := false;  
pourtout s ∈ S :  
    si pourtout t ∈ succ(s), t.G alors  
        s.F := true;
```



## Marquage CTL : $mark(F)$

- Si  $F = G \ EU \ H$ , idée :  $G \ EU \ H \equiv H \vee (G \wedge EX(G \ EU \ H))$

```
mark(G); mark(H);
```

```
L :=  $\emptyset$ ;
```

```
pourtout s  $\in$  S :
```

```
    s.F := s.H;
```

```
    si s.F alors L := L  $\cup$  {s};
```

```
tantque L  $\neq$   $\emptyset$  faire:
```

```
    s := choose any in L; // ordre sans importance
```

```
    L := L  $\setminus$  {s};
```

```
    pourtout t  $\in$  pred(s) :
```

```
        si t.G et  $\neg$ t.F alors // pas déjà marqué
```

```
            t.F = true;
```

```
            L := L  $\cup$  {t};
```

```
        finsi
```

```
    finpour
```

```
    fintq
```



## Marquage CTL : $mark(F)$

- Si  $F = G \text{ AU } H$ , idée :  $G \text{ AU } H \equiv H \vee (G \wedge AX(G \text{ AU } H))$

mark(G); mark(H);

L :=  $\emptyset$ ;

pourtout s  $\in$  S :

  s.F := s.H; s.nb := card(succ(s));

  si s.F alors L := L  $\cup$  {s};

tantque L  $\neq$   $\emptyset$  faire:

  s := choose any in L; // ordre sans importance

  L := L  $\setminus$  {s};

  pourtout t  $\in$  pred(s) :

    t.nb := t.nb - 1;

    si t.nb = 0 et t.G et  $\neg$ t.F alors

      t.F := true;

      L := L  $\cup$  {t};

    finsi

  finpour

fintq

# CTL équitale

*Fair CTL* = CTL + des contraintes d'équité multiple sur les états.

- Contraintes d'équité : un ensemble d'ensemble d'états  $F_1, \dots, F_n$
- Trace équitale : trace qui visite infiniment souvent tous les  $F_i$
- État équitale : état à partir duquel il existe au moins une trace équitale
- Avoir une propriété en CTL équitale :

$$M \models_f \phi \triangleq M \models \text{fair} \Rightarrow \phi \text{ avec } \text{fair} = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \square \diamond F_i$$

Ce n'est pas une formule de CTL (ni de LTL) !



## CTL équitable – définition

Pour un état  $s$ ,  $s \models_f \phi$  signifie que  $s$  vérifie  $\phi$  avec les contraintes d'équité :

- $s \models_f EX\phi$  s'il existe une trace équitable  $s_0 \cdot s_1 \cdots$  avec  $s_0 = s$  et tel que  $s_1 \models_f \phi$ .
- $s \models_f AX\phi$  si pour toute trace équitable  $s_0 \cdot s_1 \cdots$  avec  $s_0 = s$ ,  $s_1 \models_f \phi$ .
- $s \models_f EG\phi$  s'il existe une trace équitable  $s_0 \cdot s_1 \cdots$  avec  $s_0 = s$  et tel que  $\forall i, s_i \models_f \phi$ .
- $s \models_f AG\phi$  si pour toute trace équitable  $s_0 \cdot s_1 \cdots$  avec  $s_0 = s$ ,  $\forall i, s_i \models_f \phi$ .
- $s \models_f \phi EU\psi$  s'il existe une trace équitable  $s_0 \cdots s_k \cdots$  avec  $s_0 = s$  et tel que  $s_k \models_f \psi$  et  $\forall 0 \leq i < k, s_i \models_f \phi$
- $s \models_f \phi AU\psi$  si pour toute trace équitable  $\exists k, s_0 \cdots s_k \cdots$  avec  $s_0 = s$ , et  $s_k \models_f \psi$  et  $\forall 0 \leq i < k, s_i \models_f \phi$

# Réduction à CTL classique

On suppose qu'on a marqué les états avec un prédicat *fair* qui dit qu'il existe une trace équitable issue de l'état.

- $s \models_f EX\phi$  ssi  $s \models EX(\phi \wedge \text{fair})$
- $s \models_f AX\phi$  ssi  $s \models AX(\text{fair} \Rightarrow \phi)$
- $s \models_f EG\phi$  est compliqué
- $s \models_f AG\phi$  ssi  $s \models AG(\text{fair} \Rightarrow \phi)$
- $s \models_f \phi EU\psi$  ssi  $s \models \phi EU(\text{fair} \wedge \psi)$
- $s \models_f \phi AU\psi$  ssi  $s \models_f \neg EG\neg\psi$  et  $s \models_f \neg((\neg\psi)EU(\neg\phi \wedge \neg\psi))$



## Calcul des états équitables (*fair*)

Soit un graphe  $S$  et un ensemble de contraintes d'équité  $F_i$

- 1 Calculer  $SCC(S)$ , l'ensemble des *strongly connected components* (composantes fortement connexes) du graphe  $S$ .

- 2 Calculer l'union des SCC qui intersectent tous les  $F_i$  :

$$S' = \bigcup_{C \in SCC(S)} (C \text{ si } \forall i : C \cap F_i \neq \emptyset)$$

- 3 Fair states =  $\{u \in S : u \rightarrow^* v \text{ où } v \in S'\}$   
(fermeture réflexive transitive des prédécesseurs des états de  $S'$ )
- 4 Chaque état de  $S$  est alors marqué *fair* ou pas.



Vérification de  $S \models_f EG\phi$ 

On vérifie l'existence d'une trace vérifiant  $\phi$  et conduisant à une (ou plusieurs) composante fortement connexe où  $\phi$  est toujours vrai :

- Marquer les états avec  $\phi$
- Soit  $S(\phi)$  la restriction du système aux états vérifiant  $\phi$
- Calculer  $SCC(S(\phi))$
- Calculer  $S_f$  l'union des SCC qui intersectent tous les  $F_i$
- $s \models_f EG\phi$  ssi  $s \models \phi EU S_f$



# Complexité

- CTL classique : complexité linéaire en le nombre d'opérateurs  
=  $O(|S| \times |\phi|)$ .
- CTL équitable :
  - Calcul des SCC linéaire (algorithme de Tarjan)
  - Calcul d'accessibilité linéaire
  - Transformation linéaire en CTL classique
  - Complexité =  $O(|S| \times |\phi|)$ .

(rappel : on peut ramener l'équité sur les transitions  $WF(A)$  et  $SF(A)$  à l'équité multiple sur les états)



# Plan

- 1 Vérification par preuve
- 2 Vérification de modèles
  - Construction de l'espace d'états
  - CTL logique temporelle arborescente
  - LTL logique temporelle linéaire





# Réduction du problème

- Les traces sont en nombre infini en général.
- On se ramène à un problème de traces  $\omega$ -régulières.

## Traces $\omega$ -régulières

Soit  $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$  un système de transition **fini**,  $L$  une formule LTL

$$\begin{aligned} & \exists \sigma \in S^\omega : \sigma \in \text{Exec}(\mathcal{S}) \wedge \sigma \models L \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma_p, \sigma_c \in S^* : \langle \sigma_p \rightarrow \sigma_c^\omega \rangle \in \text{Exec}(\mathcal{S}) \wedge \langle \sigma_p \rightarrow \sigma_c^\omega \rangle \models L \end{aligned}$$



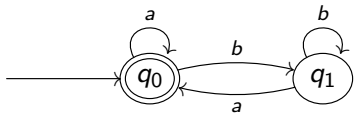
# Automate de Büchi

## Automate de Büchi

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , où

- $Q$  : ensemble fini d'états
- $\Sigma$  : alphabet fini
- $q_0 \in Q$  : l'état initial de l'automate
- $F \subseteq Q$  : les états acceptants
- $\delta \in Q \times \Sigma \mapsto Q$  : fonction de transition de l'automate.

Un **mot infini** est accepté si sa reconnaissance visite infiniment  $F$ .



reconnaît les mots infinis sur  $\{a, b\}$  ayant une infinité de  $a$ .



# Intérêt des automates de Büchi

## Ensemble infini de traces

- Permet de représenter un ensemble infini de traces  $\omega$ -régulières
- Suffisant pour représenter tout système de transition fini
- Suffisant pour représenter toute formule de LTL

## Manipulation d'ensembles infinis de traces

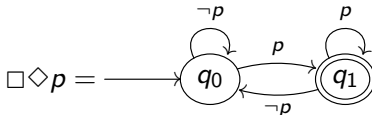
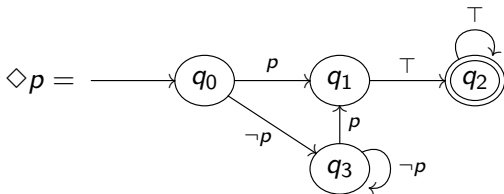
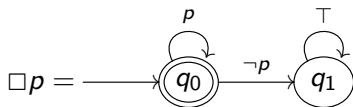
- Opérations faciles (polynomial en le nombre d'états) :  $\cup$ ,  $\cap$ , concaténation
- Opération facile : tester le vide (aucun mot accepté)
- Opération coûteuse (exponentielle) : le complémentaire

(Note : les automates de Büchi non déterministes sont strictement plus expressifs que les automates de Büchi déterministes. Par exemple :  $\{a, b\}^* b^\omega$  n'est pas reconnaissable avec un automate déterministe.)



# Transformation de $\varphi$ en automate

On peut transformer toute formule LTL en un automate de Büchi reconnaissant le même langage (le même ensemble de traces).



# Principe de la vérification LTL

## Vérifier $\mathcal{M} \models \varphi$

- 1 Transformer  $\mathcal{M}$  en un automate  $B_{\mathcal{M}}$  (trivial)
- 2 Transformer  $\varphi$  en  $B_{\neg\varphi}$
- 3 Construire  $B_{\otimes}$  reconnaissant  $L(B_{\mathcal{M}}) \cap L(B_{\neg\varphi})$
- 4 Tester si  $L(B_{\otimes})$  est vide : si oui alors  $\mathcal{M} \models \varphi$  ; si non, on a un contre-exemple

Complexité en temps :  $O(|M| \times 2^{|\varphi|})$

Complexité en espace : **PSPACE**-complet

## Équité

L'équité est une formule de LTL (p.e.  $\square\Diamond F$  ou

$\Diamond\square(\text{ENABLED } A) \Rightarrow \square\Diamond A$ )  $\rightarrow$  directement pris en compte

# Conclusion

## Vérification par preuve

Preuve manuelle assistée : lourd, expertise, système infini

## Model-checking

- Vérification automatique
- Systèmes finis de petite taille (quelques millions d'états)
- Nécessite la construction de l'espace d'état
- LTL :  $O(|M| \times 2^{|\varphi|})$
- CTL :  $O(|M| \times |\varphi|)$ , mais l'équité complexifie les formules

## Aller plus loin

- Model-checking symbolique : représentation d'un ensemble d'états par une formule
- Model-checking à la volée : vérification au fur et à mesure de la construction de l'espace d'état, permet de trouver plus vite un contre-exemple s'il existe.